ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 7 MARS 1938.

PRÉSIDENCE DE M. Aimé COTTON.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ÉLASTICITÉ. — *Sur le découpage d'un corps solide.*
Note de M. **Léon Lecornu**.

Soit un solide placé d'abord dans l'état d'équilibre naturel qui se réalise en l'absence de forces extérieures (forces massiques, c'est-à-dire agissant sur les éléments de la masse, et forces superficielles). L'application de forces extérieures astreintes seulement à vérifier les six équations universelles de l'équilibre fait naître des tensions internes et amène ainsi le corps à l'état dit d'équilibre contraint. Si l'on peut alors trouver une surface S qui le divise en deux parties et en tous points de laquelle les tensions soient nulles, tout se passe comme si ces deux parties étaient des corps indépendants.

Supposons maintenant qu'il existe une suite continue de surfaces S. Le corps peut, dans ces conditions, être regardé comme composé d'une infinité de tranches infiniment minces dont chacune se comporte comme un corps isolé. Les tranches se déforment dans le passage de l'équilibre naturel à l'équilibre contraint; mais, et c'est là le fait essentiel, ces déformations s'effectuent sans compromettre la continuité de l'ensemble. La connaissance de l'état d'équilibre contraint entraîne donc celle de l'état analogue pour une infinité d'autres corps, limités par deux quelconques des surfaces S et par la portion correspondante de la surface du corps considéré.

J'ai donné, il y a 42 ans [1], un exemple simple de ce mode de découpage.

---

[1] *Comptes rendus*, **124**, 1896, p. 96.

Il s'agissait d'un ellipsoïde de révolution, homogène et isotrope, tournant uniformément autour de son axe Oz et sollicité uniquement par les forces centrifuges résultant de la rotation. J'ai montré que la divisibilité en tranches planes normales à Oz exige alors que le rapport entre les carrés des diamètres, équatorial et polaire, ait pour valeur $\frac{4\lambda(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)(7\lambda+6\mu)}$, λ et μ étant les coefficients de Lamé; dans l'hypothèse souvent admise $\lambda=\mu$, ce rapport devient $20/39$, ou, sensiblement, $1/2$.

Sans entreprendre de traiter ici le problème général, je vais continuer à supposer que le corps, homogène et isotrope, soumis exclusivement à des forces massiques, est divisible en tranches planes et parallèles. Sa forme peut être quelconque; j'admets seulement l'existence d'un plan tangent déterminé en tout point de sa surface.

Prenons des axes de référence d'origine arbitraire et dirigeons Oz perpendiculairement aux tranches. En conservant les notations de Lamé et posant pour abréger $h=(\lambda+2\mu)/\lambda$, on doit avoir, quels que soient x, y, z,

$$(1)\qquad \begin{cases} N_3=h\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+h\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=0, \\ T_1=\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)=0, \qquad T_2=\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=0. \end{cases}$$

L'élimination de w donne, avec une fonction arbitraire $f(x, y)$,

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=f(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=h\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Partant de là, on trouve aisément

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-h\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}-h\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-h\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0. \end{cases}$$

Soient maintenant X, Y, Z les composantes de la force massique appliquée au point (x, y, z). Si ρ désigne la densité, les équations indéfinies de l'équilibre sont :

$$(4)\qquad \frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\rho X=0, \qquad \frac{\partial T_3}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\rho Y=0, \qquad \rho Z=0.$$

La force doit donc être perpendiculaire à Oz. Cette condition remplie, la connaissance de u, v, w entraîne celle de X, Y.

Restent les conditions concernant la surface du corps. Soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale au point x, y, z de cette surface, on doit avoir

$$N_1 a + T_3 b = 0, \quad T_3 a + N_2 b = 0, \quad \text{d'où} \quad N_1 N_2 - T_3^2 = 0.$$

Si donc $F(x, y, z) = 0$ est l'équation de ladite surface, il faut écrire (à un facteur près)

(5) $$N_1 N_2 - T_3^2 = F(x, y, z)$$

et

(6) $$N_1 \frac{\partial F}{\partial x} + T_3 \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad T_3 \frac{\partial F}{\partial x} + N_2 \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Mettons l'équation $F = 0$ sous la forme $z = \varphi(xy)$. Vu la nullité de N_3, on a

$$N_1 = 2\mu h\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\right), \qquad N_2 = 2\mu h\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

D'autre part, $T_3 = \mu(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$.

Les équations (6) deviennent ainsi

(7) $$2h\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

(8) $$2h\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Il s'agit de rendre ces deux équations compatibles.

A cet effet, remarquons que l'intégration des deux premières équations (3) introduit, dans u et v, les dérivées $\partial s/\partial n$, $\partial s/\partial y$ de la fonction arbitraire $s = f(x, y)$, et que, par suite, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ renferment les dérivées secondes de s. L'élimination de z entre les équations (7) et (8) aboutit donc à une équation aux dérivées partielles du second ordre en s, et le problème est ramené finalement à l'intégration de cette équation.

Concluons que le découpage par plans perpendiculaires à Oz est théoriquement possible, quelle que soit la forme du corps considéré, à condition d'appliquer des forces appropriées. Il est bon de noter qu'on connaît du même coup l'équilibre élastique du système. Comme la direction de l'axe Oz est arbitraire, le découpage peut s'effectuer d'une double infinité de manières.

Pour traiter le cas de l'ellipsoïde de révolution tournant autour de son axe, j'ai été conduit, en 1896, à représenter chacun des déplacements u, v, w par la somme d'une forme linéaire et d'une forme cubique; N_1, N_2, T_3 sont alors des fonctions du second degré, en sorte que la surface

$F(x, y, z) = 0$ est du quatrième. Mais, en profitant du fait que tous les méridiens sont alors des plans de symétrie, j'ai pu annuler T_3, en sorte que la quadrique $N_1 = 0$ devient susceptible de représenter la surface libre, et c'est ainsi que j'ai obtenu le résultat voulu. Je signale seulement que, dans l'expression de N_1, où figure une constante K, il faut lire $2K(2\lambda^2 + 2\mu^2 + \lambda\mu^2)$ au lieu de $2K\mu(3\lambda + 2\mu)$, sans que cette correction fausse les conclusions.

Proposons-nous maintenant de réaliser le découpage de l'ellipsoïde général $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 = 1$ soumis à des forces massiques symétriques par rapport aux plans principaux et normales à Oz.

Les deux équations

$$(9) \qquad \alpha x N_1 + \beta y T_3 = 0, \qquad \alpha x T_3 + \beta y N_2 = 0$$

doivent, à des facteurs près, reproduire l'équation $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1 = 0$.

N_1, N_2, T_3 étant des fonctions linéaires des dérivées premières de u, v, w, chacun de ces déplacements doit être, ici encore, la somme d'une forme cubique correspondant à $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$ et d'une forme linéaire correspondant à -1. Il faut d'ailleurs que u, v, w annulent N_3, T_1, T_2, et forment un ensemble doué de la même symétrie que l'ellipsoïde.

Ces conditions sont remplies par les valeurs

$$u = Ax + Bx^3 + Cxy^2 + (3B + C')x\frac{z^2}{h},$$

$$v = A'y + B'y^3 + C'x^2y + (3B' + C)y\frac{z^2}{h},$$

$$-hw = (A + A')z + (3B + C')x^2z + (3B' + C)y^2z + (3B + 3B' + C + C')\frac{z^3}{3h},$$

où figurent 6 coefficients arbitraires : A, A', B, B', C, C'.

Mettons les équations (9) sous la forme

$$\alpha N_1 + \beta\frac{y}{x}T_3 = 0, \qquad \beta N_2 + \alpha\frac{x}{y}T_3 = 0.$$

Comme $T_3 = 2(C + C')xy$, ces équations sont celles de deux ellipsoïdes rapportés à leurs plans principaux et nous devons, en appelant p, q deux nouveaux coefficients, écrire

$$p\left(\alpha N_1 + \beta\frac{y}{x}T_3\right) = q\left(\beta N_2 + \alpha\frac{x}{y}T_3\right) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1,$$

ce qui donne 8 conditions imposées aux 8 coefficients p, q, A, A', B, B', C, C'.

Le problème se trouve ainsi résolu.

Dans le cas d'un ellipsoïde tournant autour de son axe Oz, avec la vitesse constante ω_3, il s'agit d'un équilibre relatif pour lequel

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \rho\omega^2 x = 0, \qquad \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \rho\omega^2 y = 0.$$

Ce sont là deux conditions supplémentaires que doivent vérifier α, β, γ. On peut se donner γ et en déduire α/γ, β/γ.

Pour un ellipsoïde de révolution, il vient $\alpha = \beta$, en sorte que α/γ possède une valeur déterminée. En effectuant les calculs, on s'aperçoit que les coefficients B, C, B′, C′ sont alors égaux, et l'on retrouve ainsi le rapport α/γ obtenu, dans ma Note de 1896, par une méthode très différente.

Quand un ellipsoïde tournant n'a pas la forme requise, le découpage au moyen de sections planes devient impossible; mais il est présumable, par raison de continuité qu'on réussirait en employant des sections d'autant plus courbes qu'on s'écarte davantage de cette forme.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Mesures de gravité dans le Sud de la Chine.* Note [1] de MM. **Pierre Lejay** et **Chang Hung Chi**.

Le tableau suivant donne les valeurs de la gravité en des stations nouvelles au Sud du Yang-Tsé-Kiang.

Les premières ont été obtenues par Chang Hung Chi au cours d'une longue campagne organisée par l'Académie nationale de Peïping et l'Observatoire de Zi-Ka-Wei, pendant laquelle la Chine du Sud fut traversée deux fois dans presque toute sa longueur, de Changhaï à Yunnanfou.

Ces mesures ont été faites avec le pendule Holweck-Lejay n° 510, dont la courbe d'étalonnage a été établie précédemment [2], et dont le coefficient de température a été déterminé avec soin avant la campagne.

Les corrections de température de ce pendule étant très grandes (16 milligals par degré), il a semblé qu'on éviterait des erreurs importantes en maintenant l'instrument à température constante au cours de chaque mesure. Un thermostat de campagne a donc été mis au point; il comporte une enceinte calorifugée qui peut se placer sur le pilier ou se visser sur le trépied de campagne; une résistance chauffée par une batterie

(1) Séance du 28 février 1938.

(2) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 429.

Stations (¹).	Latitude Nord.	Longitude E. Greenwich.	Alt. (²).	δ.	Dates.	g.	g_0.	g''_0.	γ_0.	$g_0-\gamma_0$.	$g''_0-\gamma_0$.	γ'_0.	$g_0-\gamma'_0$.	$g''_0-\gamma'_0$.	n.
	° ′	° ′	mètres		1937	gals	gals	gals	gals	mgals	mgals	gals	mgals	mgals	
Zi-Ka-Wei	31.11,5	121.25,7	7	2,5	26 mars	979,436	979,438	979,437	979,416	+22	+ 21	979,432	+ 6	+ 5	8
Kimen	29.51,5	117.52,8	*125*	2,6	31 »	979,262	979,300	979,286	979,310	−10	− 24	979,327	−27	− 41	6
Kinteh Chen	29.18	117.12	*50*	2,5	2 avril	979,236	979,251	979,246	979,267	−16	− 21	979,284	−33	− 38	10
Yu Kiang	28.23,7	116.54	31	2,5	4 »	979,187	979,196	979,193	979,198	− 2	− 5	979,215	−19	− 22	11
Tsinsien	28.22,9	116.15,2	*80*	2,5	5 »	979,186	979,210	979,202	979,197	+13	+ 5	979,214	− 4	− 12	6
Nanchang	28.40,3	115.53	23	2,5	6 »	979,209	979,216	979,213	979,218	− 2	− 5	979,235	−19	− 22	15
I Chen	27.46,3	114.22,9	*115*	2,6	9 »	979,101	979,136	979,123	979,151	−15	− 28	979,168	−32	− 45	15
Chang Sha	28.12,8	112.59	38	2,5	11 »	979,167	979,179	979,175	979,183	− 4	− 8	979,200	−21	− 25	12
Chang Sha	28.12,8	112.59	38	2,5	12 »	979,167	979,179	979,175	979,183	− 4	− 8	979,200	−21	− 25	16
Paoking	27.14,7	111.27,5	*220*	2,6	14 »	979,025	979,092	979,068	979,112	−20	− 44	979,129	−37	− 61	17
Chang Sha	28.12,8	112.59	38	2,5	16 »	979,167	979,179	979,175	979,183	− 4	− 8	979,200	−21	− 25	16
Yuanling	28.27,7	110.22,7	*120*	2,5	21 »	979,153	979,190	979,177	979,203	−13	− 26	979,220	−30	− 43	14
Chih Kiang	27.27	109.37	*180*	2,5	24 »	979,040	979,095	979,076	979,127	−32	− 51	979,144	−49	− 68	11
Chih Kiang	27.27	109.37	*180*	2,5	29 »	979,041	979,096	979,077	979,127	−31	− 50	979,144	−48	− 67	20
Sanh Wei	26.57,8	108.39,9	*559*	2,6	1 mai	978,878	979,047	978,986	979,091	−44	−105	979,109	−62	−123	16
Kwei Ting	26.35,1	107.13,9	*990*	2,6	6 »	978,721	979,026	978,915	979,064	−38	−149	979,081	−55	−166	9
Kwei Yang	26.34	106.42	1020	2,6	9 »	978,706	979,021	978,906	979,063	−42	−157	979,080	−59	−174	23
Tinfang	26. 9	106.40,1	*910*	2,6	11 »	978,706	978,987	978,884	979,033	−46	−149	979,050	−63	−166	8
Kwei Yang	26.34	106.42	1020	2,6	16 »	978,704	979,019	978,904	979,063	−44	−159	979,080	−61	−176	12
Tsun Yi	27.41,7	106.54,6	*840*	2,6	17 »	978,850	979,109	979,015	979,145	−36	−130	979,162	−53	−147	13
Tunzé	28. 8	106.48,6	*920*	2,6	18 »	978,871	979,155	979,051	979,178	−23	−127	979,195	−40	−144	12
Shifong	27. 6,5	106.45	*990*	2,6	19 »	978,749	979,055	978,943	979,102	−47	−159	979,119	−64	−176	6
Kwei Yang	26.34	106.42	1020	2,6	20 »	978,706	979,021	978,906	979,063	−42	−157	979,080	−59	−174	14
Lutsonkwan	26.35,7	106.42	*1220*	2,7	21 »	978,668	979,044	978,901	979,065	−21	−164	979,082	−38	−181	16
Chenning	26. 7	105.45,9	*1235*	2,6	23 »	978,629	979,010	978,871	979,031	−21	−160	979,048	−38	−177	19

(¹) Les noms des stations de vérification ou de référence sont inscrits en compactes.

(²) Les altitudes en italiques ne sont qu'approximatives.

Stations [1].	Latitude Nord.	Longitude E. Greenwich.	Alt. [2].	δ.	Dates.	g.	g_0.	g''_0.	γ_0.	$g_0-\gamma_0$.	$g''_0-\gamma_0$.	γ'_0.	$g_0-\gamma'_0$.	$g''_0-\gamma'_0$.	n.
	° ′	° ′	mètres		1937	gals	gals	gals	gals	mgals	mgals	gals	mgals	mgals	
Annan	25.49	105.13	1460	2,6	24 mai	978,551	979,002	978,837	979,009	− 7	−172	979,026	−24	−189	13
Panhsien	25.46,40	104.38,9	1440	2,6	27 »	978,517	978,961	978,799	979,006	−45	−207	979,023	−62	−224	15
Yunnanfou	25. 4,2	102.42	1896	2,6	3 juin	978,350	978,935	978,722	978,957	−22	−235	978,974	−39	−252	24
Kutsin	25.31,9	103.48,2	1820	2,6	6 »	978,388	978,949	978,745	978,989	−40	−244	979,006	−57	−261	14
Hinjen	25.29,1	105.10,3	1325	2,7	9 »	978,545	978,954	978,799	978,986	−32	−187	979,003	−49	−204	18
Anlong	25. 9,4	105.28,6	1330	2,7	10 »	978,539	978,949	978,794	978,963	−14	−169	978,980	−31	−186	14
Chenning	26. 7	105.45,9	1235	2,6	17 »	978,630	979,011	978,872	979,031	−20	−159	979,048	−37	−176	15
Kwei Yang	26.34	106.42	1020	2,6	20 »	978,706	979,021	978,906	979,063	−42	−157	979,080	−59	−174	13
Tuyun	26.15,3	107.31,6	775	2,6	22 »	978,754	978,993	978,906	979,041	−48	−135	979,058	−65	−152	18
Tuyun	26.15,3	107.31,6	775	2,6	23 »	978,756	978,995	978,908	979,041	−46	−133	979,058	−63	−150	8
Tushan	25.49,7	107.32,2	950	2,6	23 »	978,705	978,998	978,981	979,010	−12	−119	979,027	−29	−136	14
Lutsai	25.18	107.24,7	835	2,6	25 »	978,696	978,954	978,860	978,973	−19	−113	978,990	−36	−130	8
Kin Yuan	24.30,3	108.37,9	200	2,7	27 »	978,831	978,892	978,869	978,918	−26	− 49	978,935	−43	− 66	18
Liuchow	24.19,8	109.24,1	180	2,6	29 »	978,844	978,899	978,879	978,906	− 7	− 27	978,924	−25	− 45	14
Laipo	24.26	110.23	160	2,5	30 »	978,844	978,893	978,876	978,913	−20	− 37	978,930	−37	− 54	13
Kweilin	25.17,7	110.17,2	145	2,6	2 juill.	978,879	978,923	978,907	978,873	−50	− 66	978,990	−67	− 83	18
Lingling	26.10	111.34,6	105	2,6	6 »	978,970	979,002	978,990	979,034	−32	− 43	979,051	−49	− 61	15
Hengchow	26.56	112.33	55	2,5	8 »	979,059	979,076	979,070	979,089	−13	− 19	979,106	−30	− 36	7
Changsha	28.12,8	112.59	38	2,5	9 »	979,167	979,179	979,175	979,184	− 5	− 9	979,201	−22	− 26	16
Nanchang	28.40,3	115.53	23	2,5	14 »	979,210	979,217	979,215	979,218	− 1	− 3	979,235	−18	− 20	12
Hokow	28.19,1	117.42,4	30	2,5	15 »	979,172	979,181	979,178	979,192	−11	− 14	979,209	−28	− 31	15
Chuchow	28.57,2	118.51	50	2,6	18 »	979,215	979,230	979,224	979,240	−10	− 16	979,257	−27	− 33	15
Zi-Ka-Wei	31.11,5	121.25,7	7	2,5	— »	979,436	979,438	979,437	979,416	+22	+ 21	979,432	+ 6	+ 5	10
Zi-Ka-Wei	31.11,5	121.25,7	7	2,5	13 mai	979,434	979,436	979,435	979,416	+20	+ 19	979,432	+ 4	+ 3	
Tien Tai Shan	29.12	121.02	155	2,6	14 »	979,205	979,252	979,235	979,259	− 7	− 24	979,276	−24	− 41	
Pei k'i	28.18,5	121.02	6	2,5	16 »	979,188	979,190	979,189	979,191	− 1	− 2	979,208	−18	− 19	
Liechui	28.28	119.54	95	2,6	17 »	979,167	979,196	979,185	979,203	− 7	− 18	979,220	−24	− 35	
Zi-Ka-Wei	31.11,5	121.25,7	7	2,5	19 »	979,436	979,438	979,437	979,416	+22	+ 21	979,432	+ 6	+ 5	

d'accumulateurs de faible capacité permet de maintenir l'instrument à une température légèrement supérieure à l'ambiante, constante, pendant plusieurs heures, à quelques dixièmes de degré près. On a veillé à ce que le champ magnétique produit par le courant soit négligeable au centre de l'enceinte. La batterie est rechargée par la dynamo de la voiture au cours des voyages. Ce dispositif simple a donné toute satisfaction ; il supprime la correction de variation de température.

Les dernières mesures ont été faites par P. Lejay avec le pendule 622 déjà utilisé et étalonné dans des campagnes précédentes ([3]).

Toutes les valeurs sont rapportées à la valeur de la base à Zi-Ka-Wei, $g = 979,436$ gals.

M. **P. Lebeau** fait hommage à l'Académie du tome I de la deuxième édition du *Traité de Pharmacie chimique*, qu'il vient de publier en collaboration avec M. G. Courtois.

ELECTIONS.

Par la majorité absolue des suffrages, M. **L. Cayeux** est désigné pour faire partie du Jury chargé d'examiner les titres des candidats au poste de *Directeur de l'Institut National Agronomique*.

LECTURES.

En remettant à l'Académie le crâne du sociologue *Henri de Saint-Simon*, M. **Alfred Pereire** s'exprime en ces termes ([1]) :

Monsieur le Président,
Messieurs,

J'ai l'honneur d'offrir à l'Académie des Sciences le crâne du réformateur social Henri de Saint-Simon.

Voici dans quelles conditions je l'ai possédé.

Mon arrière-grand-père Émile Pereire avait épousé la sœur d'Olinde

---

([3]) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 193.

([1]) Séance du 28 février 1938.

Rodrigues. Celui-ci avait connu Saint-Simon chez le banquier Ardouin deux mois avant sa tentative de suicide. Olinde Rodrigues avait aidé Saint-Simon à vivre les dernières semaines de son existence. Saint-Simon, né à Paris le 17 octobre 1760, est mort à Paris le 19 mai 1825. Le lendemain de son décès, le célèbre phrénologiste Gall fit l'autopsie du Maître. Il trouva au cerveau de Saint-Simon une surface considérable et crut y reconnaître les circonvolutions de l'imprudence et de la persévérance : ainsi s'expriment les historiens qui ont relaté la vie du philosophe.

Il est vraisemblable que, lorsque les restes de Saint-Simon furent inhumés au Père-Lachaise, un ou deux mois après sa mort, Olinde Rodrigues conserva cette pièce anatomique qu'il légua, ainsi que les livres du grand socialiste, à son beau-frère, Émile Pereire, qui le transmit à son frère Isaac, mon grand-père.

Isaac Pereire est mort en 1880. Depuis cette date, personne, à ma connaissance, n'avait ouvert son secrétaire. Je savais que celui-ci contenait quelques archives et quelques coffrets dont l'un renfermait des décorations. Ces derniers jours, désirant offrir à la Bibliothèque Nationale, que j'ai le plaisir de servir depuis plus de 35 ans, tous les livres et les archives de Saint-Simon, j'ai découvert, dans l'un de ces écrins, le crâne que voici, sur la face duquel j'ai lu deux dates : 17 octobre 1760-19 mai 1825.

Ce crâne est bien celui d'Henri de Saint-Simon, ainsi que le prouvent les renseignements que je viens de donner et les dates qu'il porte. On peut constater, en outre, qu'il présente les traces du coup de pistolet qu'il s'était donné. Celui-ci a effondré et en partie détruit la paroi interne de l'orbite droite; le bord externe de celle-ci présente à son angle supérieur les traces de l'orifice d'entrée de l'un des projectiles. Ceci, avec le profil du crâne et sa comparaison avec les portraits connus de Saint-Simon, suffit déjà à établir en dehors de toute autre considération, son authenticité. Maxime Leroy, qui a consacré à Henri de Saint-Simon deux belles études, rapporte de la façon suivante sa tentative de suicide : Saint-Simon chargea son pistolet de sept chevrotines, il le plaça sur sa table. A l'heure qu'il s'était fixée, il lâcha la détente. Le coup partit. L'apophyse de l'œil fut ébréchée et l'œil perdu. Mais les boures et les chevrotines ne pénétrèrent point dans le cerveau.

J'ajouterai une observation qui pourrait revêtir un caractère de haute spiritualité. Au Père-Lachaise, la tombe de Saint-Simon est demeurée volontairement ouverte, comme si ses disciples avaient voulu que son âme s'envolât vers l'avenir. Je ne pense pas que ses héritiers aient voulu marquer que seul son corps se trouvait dans la terre, et que son cerveau n'y était

plus. C'est un devoir pour moi de vous offrir ici, Messieurs, la dernière demeure terrestre de cette âme d'élite, heureux si cette âme, déjà éparse dans le monde pouvait encore féconder d'autres esprits en vue du bonheur futur. Je vous offre donc le crâne d'Henri de Saint-Simon en exprimant le vœu que vous en fassiez don au Muséum national d'Histoire naturelle pour y figurer à côté de celui de Descartes.

COMMISSIONS.

Le scrutin pour la nomination des Commissions de prix de 1938 est clos en la séance du 7 mars.

48 cahiers de vote ont été déposés.

Le dépouillement du scrutin donne les résultats suivants :

I. Mathématiques : *Prix Poncelet, Francœur.* — MM. É. Picard, L. Lecornu, J. Hadamard, É. Borel, M. d'Ocagne, H. Lebesgue, É. Cartan, G. Julia, P. Montel.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Drach, H. Villat.

II. Mécanique : *Prix Montyon, Fourneyron, Henri de Parville, fondation Henry Bazin.* — MM. É. Picard, L. Lecornu, É. Borel, J. Drach, É. Jouguet, A. de Gramont, H. Villat, L. de Broglie, A. Caquot.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Hadamard, M. d'Ocagne.

III. Astronomie : *Prix Lalande, Damoiseau, Valz, J.-C. Janssen, La Caille, fondation Antoinette Janssen.* — MM. É. Picard, H. Deslandres, H. Lebesgue, A. Cotton, E. Esclangon, C. Maurain, A. de La Baume Pluvinel, G. Fayet, J. Chazy.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. E. Fichot, C. Fabry.

IV. Géographie : *Prix Delalande-Guérineau, Gay, fondation Tchihatchef, prix Binoux.* — MM. A. Lacroix, R. Bourgeois, E. Fichot, G. Perrier, C. Maurain, L. Lapicque, J. Tilho, G. Durand-Viel, N....

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. M. d'Ocagne, M. Molliard.

V. Navigation : *Prix Plumey.* — MM. É. Picard, L. Lecornu, R. Bourgeois, M. Laubeuf, É. Borel, E. Fichot, G. Perrier, J. Drach, E. Jouguet, H. Villat, J. Tilho, L. de Broglie, A. Caquot, G. Durand-Viel, N....

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. M. d'Ocagne, P. Langevin.

VI. Physique : *Prix L. La Caze, François Hébert, Hughes, fondations Danton, Clément Félix, général Ferrié.* — MM. É. Picard, É. Branly, M. Brillouin, J. Perrin, A. Cotton, M. de Broglie, C. Fabry, A. de Gramont, P. Langevin.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. A. Lacroix, L. de Broglie.

VII. Chimie : *Prix Montyon des arts insalubres, Jecker, L. La Caze, fondation Cahours, prix Houzeau, fondation Charles-Adam Girard.* — MM. A. Lacroix, A. Béhal, G. Urbain, G. Bertrand, A. Desgrez, M. Delépine, R. Fosse, R. Lespieau, P. Lebeau.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Perrin, M. de Broglie.

VIII. Minéralogie et Géologie : *Prix Fontannes, André-C. Bonnet, James Hall.* — MM. A. Lacroix, C. Barrois, L. de Launay, P. Sabatier, A. Cotton, L. Cayeux, C. Jacob, C. Mauguin, F. Grandjean.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Perrin, J. Tilho.

IX. Physique du globe : *Prix Victor Raulin.* — MM. H. Deslandres, A. Lacroix, É. Branly, R. Bourgeois, M. d'Ocagne, E. Esclangon, C. Maurain.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. E. Fichot, C. Fabry.

X. Botanique : *Prix Desmazières, Montagne, de Coincy.* — MM. L. Bouvier, A. Lacroix, P.-A. Dangeard, G. Bertrand, M. Molliard, L. Blaringhem, A. Guilliermond, A. Chevalier, H. Colin.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. R. Fosse, C. Pérez.

XI. Économie rurale : *Prix Paul Marguerite de La Charlonie.* — MM. P. Marchal, E. Leclainche, G. Bertrand, L. Blaringhem, L. Lapicque, R. Fosse, É. Schribaux, G. Moussu, M. Javillier.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. M. Molliard, H. Colin.

XII. Anatomie et Zoologie : *Prix Cuvier, fondation Savigny, prix Jean Thore.* — MM. A. d'Arsonval, L. Bouvier, A. Lacroix, P. Marchal, H. Vincent, M. Caullery, C. Pérez, N..., N....

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. L. Cuénot, A. Guilliermond.

XIII. Anthropologie : *Prix André-C. Bonnet.* — MM. H. Vincent, M. Caullery, L. Blaringhem, L. Lapicque, A. Gosset, J.-L. Faure, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Achard, P. Portier.

XIV. Médecine et Chirurgie : *Prix Montyon, Barbier, Bréant, Godard, Mège, Bellion, Larrey, Jean Dagnan-Bouveret.* — MM. A. d'Arsonval, A. Lacroix, É. Branly, E. Leclainche, H. Vincent, C. Achard, L. Lapicque, A. Gosset, J.-L. Faure, C. Pérez, P. Portier.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. M. Javillier, E. Sergent.

XV. Cancer et tuberculose : *Fondation Roy-Vaucouloux, prix Louise Darracq, Eugène et Amélie Dupuis.* — MM. H. Vincent, M. Caullery, C. Achard, L. Lapicque, A. Gosset, J.-L. Faure, E. Sergent.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. E. Leclainche, G. Moussu.

XVI. Physiologie : *Prix Montyon, L. La Caze, Pourat, Martin-Damourette.* — MM. A. d'Arsonval, H. Vincent, M. Molliard, M. Caullery, L. Lapicque, C. Pérez, P. Portier.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. G. Bertrand, A. Guilliermond.

XVII. Statistique : *Prix Montyon.* — MM. É. Picard, L. Lecornu, É. Borel, M. d'Ocagne, H. Lebesgue, J. Drach, C. Maurain.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. E. Fichot, É. Cartan.

XVIII. Histoire et philosophie des sciences : *Prix Binoux.* — MM. É. Picard, L. Bouvier, L. de Launay, É. Borel, M. d'Ocagne, M. Caullery, L. de Broglie.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. G. Bertrand, H. Villat.

XIX. Ouvrages de sciences : *Prix Henri de Parville.* — MM. A. Cotton, A. Béhal, É. Picard, A. Lacroix, et trois membres élus : MM. É. Borel, M. Caullery, M. d'Ocagne.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. H. Villat, G. Bertrand, M. de Broglie.

XX. *Médailles Arago, Lavoisier, Berthelot, Henri Poincaré.* — MM. A. Cotton, A. Béhal, É. Picard, A. Lacroix.

XXI. *Prix Gustave Roux, Thorlet, fondations Trémont, Gegner, Hirn, Henri Becquerel, Mme Victor Noury, Charles Frémont, Giffard, Lannelongue, Gibou, Alexandre Darracq, Girbal-Baral, Leroy-Drouault, Octave Mirbeau.* — MM. A. Cotton, A. Béhal, É. Picard, A. Lacroix, R. Bourgeois, L. Bouvier.

XXII. *Prix fondé par l'État* (Grand prix des Sciences mathématiques). —

MM. É. Picard, L. Lecornu, J. Hadamard, É. Borel, H. Lebesgue, É. Cartan, G. Julia.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. R. Bourgeois, J. Drach.

XXIII. *Prix Bordin* (Division des Sciences physiques) : MM. L. Bouvier, A. Lacroix, P.-A. Dangeard, H. Vincent, M. Molliard, M. Caullery, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. L. Blaringhem, A. Gosset.

XXIV. *Prix Lallemand*. — MM. A. d'Arsonval, L. Bouvier, P. Marchal, H. Vincent, M. Caullery, L. Lapicque, A. Gosset.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J.-L. Faure, C. Pérez.

XXV. *Prix Serres*. — MM. A. d'Arsonval, L. Bouvier, P. Marchal, E. Leclainche, H. Vincent, M. Caullery, L. Lapicque, C. Pérez, P. Portier.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Achard, A. Gosset.

XXVI. *Prix Vaillant*. — MM. L. Bouvier, A. Lacroix, P.-A. Dangeard, M. Molliard, M. Caullery, M. Delépine, R. Fosse.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. L. Lapicque, C. Pérez.

XXVII. *Prix Estrade-Delcros*. — MM. L. Bouvier, A. Lacroix, G. Bertrand, M. Caullery, L. Blaringhem, A. Guilliermond, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. P.-A. Dangeard, M. Molliard.

XXVIII. *Prix Houllevigue*. — MM. É. Picard, H. Deslandres, L. Lecornu, É. Borel, M. Brillouin, M. d'Ocagne, H. Lebesgue.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Perrin, É. Cartan.

XXIX. *Prix Saintour* (Sciences physiques). — MM. L. Bouvier, A. Lacroix, P. Marchal, P.-A. Dangeard, H. Vincent, M. Molliard, M. Caullery.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. A. Guilliermond, C. Pérez.

XXX. *Prix Jules Mahyer*. — MM. A. d'Arsonval, A. Lacroix, P.-A. Dangeard, M. Molliard, M. Caullery, L. Blaringhem, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. H. Vincent, G. Bertrand.

XXXI. *Prix Lonchampt*. — MM. A. d'Arsonval, A. Lacroix, E. Leclainche, G. Bertrand, M. Delépine, G. Moussu, M. Javillier.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. H. Vincent, M. Caullery.

XXXII. *Prix Henry Wilde.* — MM. É. Picard, H. Deslandres, A. Lacroix, É. Borel, G. Bertrand, J. Perrin, E. Esclangon.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Jacob, H. Villat.

XXXIII. *Prix Caméré.* — MM. L. Lecornu, J.-L. Breton, M. d'Ocagne, P. Séjourné, J. Drach, É. Jouguet, A. Caquot.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. E. Picard, H. Villat.

XXXIV. *Prix Albert Ier de Monaco.* — MM. A. Cotton, A. Béhal, É. Picard, A. Lacroix et sept membres qui seront élus ultérieurement.

XXXV. *Prix Marquet* (Sciences mathématiques). — MM. É. Picard, H. Deslandres, L. Lecornu, É. Borel, A. Cotton, É. Cartan, H. Villat.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Perrin, J. Drach.

XXXVI. *Prix du général Muteau.* — MM. É. Picard, A. Lacroix, R. Bourgeois, É. Borel, M. d'Ocagne, G. Perrier, G. Durand-Viel.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. J. Tilho, A. Caquot.

XXXVII. *Prix Jérôme Ponti.* — MM. É. Picard, L. Lecornu, É. Borel, M. d'Ocagne, J. Perrin, C. Fabry, H. Villat.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. R. Bourgeois, C. Maurain.

XXXVIII. *Fondation Millet-Ronssin.* — MM. A. Lacroix; L. Cayeux, C. Jacob; P.-A. Dangeard, A. Guilliermond; P. Marchal, C. Pérez.

Ont obtenu ensuite le plus de suffrages : MM. C. Barrois, M. Molliard, L.-E. Bouvier.

XXXIX. Recherches scientifiques : *Fondations Villemot, Carrière.* — MM. A. Cotton, A. Béhal, É. Picard, A. Lacroix et douze membres qui seront élus ultérieurement.

CORRESPONDANCE.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Étude de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité.* Note [1] de M. **Wolfgang Dœblin**, présentée par M. Émile Borel.

Nous poursuivons dans cette Note l'étude systématique de l'ensemble de puissances [désigné ci-dessous par $E(\mathcal{L})$] d'une loi de probabilité $\mathcal{L}$ com-

[1] Séance du 21 février 1938.

mencée dans une Note récente [2]. Nous répondrons aussi (I, II et V) à quelques questions laissées ouvertes dans le livre récent de M. Paul Lévy [3] (p. 211, § 3). La formule désignée plus loin par (1) est la formule (1) de la Note citée, $E'(\mathcal{L})$ est l'ensemble dérivé de $E(\mathcal{L})$.

Énoncés. — I. Soit $D_n(\alpha)$ la dispersion [cf. [3]] de $\mathcal{L}^n$ pour la probabilité α (c'est-à-dire la longueur du plus petit intervalle fermé auquel $\mathcal{L}^n$ affecte une probabilité α). *Pour que $D_n(\beta)/D_n(\alpha) \to 0$ si $n \to \infty$ quel que soit α et $\beta < \alpha$ il faut et il suffit que*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\Pr\{|x| > 2X\}}{\Pr\{|x| > X\}} = 1.$$

II. Si $K[\mathcal{L}^n]$ converge vers une classe limite (non impropre), si $n \to \infty$, on sait [2] que cette classe est soit celle d'une loi de Gauss (condition nécessaire et suffisante bien connue), soit celle d'une autre loi quasi stable. *La condition nécessaire et suffisante pour cela est qu'on puisse écrire, si $X \to \infty$,*

$$1 - F(X) = h_1(X)X^{-\alpha}, \qquad F(-X) = h_2(X)X^{-\alpha}$$

avec $0 < \alpha < 2$, $h_i(kX)/h_i(X) \to 1$ quel que soit k et où

$$\lim_{X \to \infty} \frac{h_1(X)}{[h_1(X) + h_2(X)]}$$

existe. Dans tous les autres cas $E'(\mathcal{L})$ est vide, ou a la puissance du continu. [Dans son livre, M. P. Lévy a déjà considéré comme vraisemblable que si $E'(\mathcal{L})$ contient deux classes, il en contient une infinité.]

III. $E'(\mathcal{L})$ *est fermé, uniquement composé de lois ind. div.* [propriété bien connue [3]] *et contient avec la loi dont la fonction caractéristique est $e^{\psi(t)}$ les lois dont les fonctions caractéristiques sont $e^{u\psi(t)}$ pour tout $u > 0$.*

Remarque. — Si la fonction caractéristique de $\mathcal{L}_1 \subset E'(\mathcal{L})$ est $e^{\psi(t)}$ et si celle de $\mathcal{L}_2 \subset E'(\mathcal{L})$ n'est pas de la forme $e^{u\psi(t)}$, alors si $\{n_\rho\}$ resp. $\{n'_\rho\}$ est une suite avec $K[\mathcal{L}^{n_\rho}] \to K[\mathcal{L}_1]$, resp. $K[\mathcal{L}^{n'_\rho}] \to K[\mathcal{L}_2]$, $|\log n_\rho - \log n'_\rho| \to \infty$ ce qui empêche l'application de certains raisonnements qu'on pourrait être tentés d'appliquer.

IV. *Si $E'(\mathcal{L})$ est compact, il existe une fonction $\Phi(\alpha)$ avec $0 < \Phi(\alpha) < \infty$ si $0 < \alpha < 1$ telle que le rapport de la dispersion pour la prob. α d'une loi quelconque de $E'(\mathcal{L})$ à la dispersion pour la prob. $1/2$ est $< \Phi(\alpha)$ si $\alpha > 1/2$,*

---

(2) *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 306.

(3) *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, 1937.

$> \Phi(\alpha)$ *si* $\alpha \leq 1/2$. $\mathrm{E}(\mathfrak{L})$ *est alors lui-même compact. Si* $\mathrm{E}(\mathfrak{L})$ *est compact, mais non* $\mathrm{E}'(\mathfrak{L})$, $\mathrm{E}'(\mathfrak{L})$ *contient les lois discontinues.*

Étant donné une loi ind. div. $\mathfrak{L}'$, il n'est pas très difficile d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathrm{E}'(\mathfrak{L}) \ni \mathfrak{L}'$. Bornons-nous au cas où $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$.

V. *Pour que la loi ind. div.* $\mathfrak{L}$ *non quasistable dont la fonction caractéristique est* (1) *soit un élément de* $\mathrm{E}'(\mathfrak{L})$, *il faut et il suffit qu'il existe une suite de nombres* $b_n \to \infty$, b_1 *étant un point de continuité de* $\mathrm{N}^+(x)$ *et de* $\mathrm{N}^-(-x)$ *telle que, en tout point de continuité et en tout intervalle ne contenant pas l'origine*

$$\frac{\mathrm{N}^+(x b_n)}{\mathrm{N}^+(b_n) + \mathrm{N}^-(-b_n)} \to \frac{\mathrm{N}^+(x b_1)}{\mathrm{N}^+(b_1) + \mathrm{N}^-(-b_1)},$$
$$\frac{\mathrm{N}^-(-x b_n)}{\mathrm{N}^+(b_n) + \mathrm{N}^-(-b_n)} \to \frac{\mathrm{N}^-(-x b_1)}{\mathrm{N}^+(b_1) + \mathrm{N}^-(-b_1)}$$

et

$$\lim_{\eta \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{N}^+(b_1) + \mathrm{N}^-(-b_1)}{\mathrm{N}^+(b_n) + \mathrm{N}^-(-b_n)} \frac{1}{b_n^2} \int_{-\eta b_n}^{\eta b_n} x^2 \, d\mathrm{N}(x) = \sigma^2.$$

VI. *Soient* $\mathfrak{L}_1$ *et* $\mathfrak{L}_2$ *les lois ind. div. dont les fonctions caractéristiques sont de la forme* (1) *avec* $a = \sigma = 0$ *et pour* $x > 10$,

$$d\mathrm{N}^+(x) = d\mathrm{N}^-(-x) = x^{\sin \log x} \, dx \, (x \log x)^{-2},$$
$$\text{resp. } d\mathrm{N}^+(x) = -\operatorname{tang} \log 2x \, d\mathrm{N}^-(-x) = \sin^2 \log 2x \,.\, x^{\sin \log x} \, dx \, (x \log x)^{-2},$$

alors $\mathrm{E}(\mathfrak{L}_1)$ *est l'ensemble des classes de toutes les lois stables symétriques,* $\mathrm{E}(\mathfrak{L}_2)$ *celui de toutes les lois quasistables.*

La plupart des énoncés ci-dessus reposent sur le lemme suivant :

VII. *Quel que soit* α, *la loi de* $\mathrm{S}_n/\mathrm{D}_n(\alpha)$ (S_n dépendant de $\mathfrak{L}''$) *peut être représentée asymptotiquement par la loi ind. div.* (1), où $a = a_n$ a une valeur qu'il est inutile d'écrire et, *pour* $x > \eta_n > 0$,

$$d\mathrm{N}_n^+(x) = n \, d\mathrm{F}[x \mathrm{D}_n(\alpha)], \qquad d\mathrm{N}_n^-(x) = -n \, d\mathrm{F}[-x \mathrm{D}_n(\alpha)],$$
$$\sigma_n^2 = \frac{n}{\mathrm{D}_n^2(\alpha)} \left[\int_{-\eta_n \mathrm{D}_n(\alpha)}^{\eta_n \mathrm{D}_n(\alpha)} x^2 \, d\mathrm{F}(x) - \left(\int_{-\eta_n \mathrm{D}_n(\alpha)}^{\eta_n \mathrm{D}_n(\alpha)} x \, d\mathrm{F}(x) \right)^2 \right],$$

η_n *tendant suffisamment lentement vers zéro*, et cela a lieu *même si les lois de* $(\mathrm{S}_n - a_n)/\mathrm{D}_n(\alpha)$ *ne forment pas un ensemble compact.*

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Résolution d'un système d'équations de M. Schrödinger.* Note de M. **Robert Fortet**, présentée par M. Émile Borel.

M. Schrödinger [1] a envisagé un mode de réversibilité en probabilité qui conduit au problème suivant :

Soient x et y deux nombres réels variables respectivement sur des intervalles $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ finis ou non (mais fermés s'ils sont finis) et trois fonctions $g(x, y)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(y)$ définies pour $x \subset \mathcal{J}_1$, $y \subset \mathcal{J}_2$ et vérifiant les hypothèses I suivantes :

Hypothèses I :

$$(a) \qquad g(x, y) \geqq 0; \qquad \omega_1(x) \geqq 0; \qquad \omega_2(y) \geqq 0;$$

$$(b) \qquad \int_{\mathcal{J}_1} \omega_1(x)\,dx = \int_{\mathcal{J}_2} \omega_2(y)\,dy > 0 \quad (^2).$$

On considère le système d'équations (S)

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \varphi(x) \displaystyle\int_{\mathcal{J}_2} g(x, y)\,dy = \omega_1(x), \\ \psi(y) \displaystyle\int_{\mathcal{J}_1} g(x, y)\,dx = \omega_2(y), \end{cases}$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont deux fonctions inconnues définies respectivement sur $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$.

Il s'agirait de savoir si (S) admet des solutions et combien, les solutions positives (c'est-à-dire où φ et ψ sont $\geqq 0$) étant particulièrement intéressantes. D'après M. S. Bernstein, si $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = (-\infty, +\infty)$ et si $g(x, y)$ est de la forme

$$(1) \qquad g(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{\sigma^2}},$$

---

(1) *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie, Phys.-Math. Klasse,* 1931, p. 144; *Ann. de l'Inst. Poincaré,* **2**, 1932, p. 303.

(2) Dans le problème de probabilité de M. Schrödinger, il faut supposer de plus que

$$\int_{\mathcal{J}_2} g(x, y)\,dy = 1.$$

le système (S) admet une solution pourvu que ω_1 et ω_2 soient continus [3].

Nous avons étudié le système (S) sous les hypothèses II plus générales que voici :

Hypothèses II. — a. $g(x, y)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(y)$ *sont continues;*

b. Pour chaque valeur fixe de x *ou de* y, $g(x, y)$ *n'est nul que sur un ensemble de mesure nulle.*

On a alors :

Théorème d'unicité. — *Sous les hypothèses I et II, le système* (S) *admet une solution positive au plus* [4].

Premier théorème d'existence. — *Sous les hypothèses I et II, et si l'une ou l'autre des intégrales*

$$\int_{\mathfrak{I}_2} \frac{\omega_2(y)\,dy}{\int_{\mathfrak{I}_1} g(x, y)\,\omega_1(x)\,dx}, \quad \int_{\mathfrak{I}_1} \frac{\omega_1(x)\,dx}{\int_{\mathfrak{I}_2} g(x, y)\,\omega_2(y)\,dy}$$

est finie, le système (S) *admet une solution positive (et une seule).*

Pour obtenir un second théorème d'existence, posons la définition suivante :

Fonctions de la classe (B). — $g(x, y)$ $(x \subset \mathfrak{I}_1,\ y \subset \mathfrak{I}_2)$ est de la classe (B) en x pour l'intervalle fini fermé $\mathcal{F}$ $(\mathcal{F} \subset \mathfrak{I}_1)$ si $f(y)$ $(y \subset \mathfrak{I}_2)$ désignant une fonction ≥ 0 continue quelconque, l'hypothèse que l'intégrale $F(x) = \int_{\mathfrak{I}_2} g(x, y)\, f(y)\, dy$ est finie presque partout sur l'un quelconque des ensembles ouverts qui contiennent $\mathcal{F}$, entraîne que cette intégrale est uniformément convergente sur $\mathcal{F}$.

$g(x, y)$ est de la classe (B) en x, si elle est de la classe (B) en x pour tout intervalle fini fermé; on définit de même les fonctions de la classe (B) en y [5].

On a alors :

---

[3] S. Bernstein, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses, Zurich*, 1, 1932, p. 308. A notre connaissance, M. Bernstein n'a pas publié sa démonstration; il ne dit pas si la solution est unique.

[4] Naturellement, on ne distingue pas deux solutions de la forme : (φ, ψ) et $(\varphi/a, \psi a)$ où a est une constante.

Il faut noter d'autre part qu'en général, outre la solution positive, existent des solutions de signe variable.

[5] Sous les hypothèses I et II, cette condition est réalisée d'elle-même si $\mathfrak{I}_1$ où $\mathfrak{I}_2$ est fini

SECOND THÉORÈME D'EXISTENCE. — *Sous les hypothèses I et II, et si $g(x, y)$ est de la classe* (B) *en x ou en y, le système* (S) *admet une solution positive (et une seule)* ([6]).

Rectification à notre Note du 24 mai 1937 ([7]). — La démonstration du théorème III énoncé dans cette Note exige que U_1 soit complètement continu (ce qui entraîne $P_1 = \infty$), ce théorème doit donc être complété par l'adjonction de cette hypothèse. Comme on suppose celle-ci vérifiée pour établir le théorème IV (et le théorème de MM. Kryloff et Bogoliouboff), la suite subsiste sans changements.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur certaines décompositions en aléatoires imaginaires*. Note de M. **Henri Eyraud**, présentée par M. Émile Borel.

Certains modes de décomposition des aléatoires peuvent rendre des services même s'ils font appel à l'intermédiaire d'aléatoires imaginaires.

Nous choisissons comme aléatoire élémentaire l'aléatoire de Poisson Π qui prend la valeur entière n avec la probabilité

$$p_n = \frac{1}{e\,n!}, \tag{1}$$

nous formons, avec les coefficients numériques

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m \tag{2}$$

réels ou imaginaires, l'aléatoire

$$a_1\Pi + a_2\Pi + \ldots + a_m\Pi, \tag{3}$$

et nous déterminons les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de manière que l'aléatoire (3) coïncide dans ses m premiers moments avec une aléatoire donnée.

Désignons par

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \ldots \tag{4}$$

les *cumulants*, ou *semi-invariants* de l'aléatoire (3). On a les relations

$$\sigma_p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

([6]) La classe ainsi définie est assez vaste; en particulier, les fonctions de la forme (1) sont de la classe (B) en x et en y, de sorte que le résultat de M. Bernstein est un cas particulier de notre second théorème d'existence.

([7]) *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1543.

Si donc on se donne les m premiers cumulants, les coefficients (2) seront racines d'une équation de degré m

$$x^m - s_1 x^{m-1} + s_2 x^{m-2} - \ldots = 0. \tag{6}$$

Entre les coefficients de cette équation et les coefficients (4) on a les formules de récurrence

$$\sigma_p - s_1\sigma_{p-1} + \ldots + (-1)^p s_{p-1}\sigma_1 + (-1)^p p s_p = 0. \tag{7}$$

L'équation (8) s'écrit alors sous forme de déterminant; par exemple pour $m = 4$ elle s'écrit

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ 0 & 3 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 2 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Cherchons par exemple l'aléatoire du type (3) dont tous les cumulants jusqu'à l'ordre m soient nuls, à l'exception du cumulant d'ordre q qui est égal à l'unité.

On trouve que les coefficients (3) sont racines de l'équation

$$\mathcal{E}\left(x^m e^{-\frac{1}{q x^q}}\right) = 0, \tag{9}$$

où $\mathcal{E}$ désigne la partie entière de l'expression entre parenthèses.

Si on y fait $q = m$ on a l'équation simple

$$m x^m - 1 = 0. \tag{10}$$

Si m augmente indéfiniment dans (10), l'aléatoire devient à la limite l'aléatoire imaginaire engendrée par la rotation de l'aléatoire II autour de l'origine, dans le plan complexe. Cette aléatoire a tous ses moments nuls, comme toutes les aléatoires de révolution.

L'aléatoire élémentaire II peut être remplacée par toute autre aléatoire réelle ou imaginaire dont aucun cumulant ne soit nul.

On peut toujours déterminer une aléatoire d'ordre m qui prenne avec une égale probabilité m valeurs

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m, \tag{11}$$

et qui admette pour ses m premiers moments m nombres donnés

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_m. \tag{12}$$

On trouve que les valeurs (11) sont racines d'une équation du type (8) dans laquelle on a remplacé les (σ_p) par les $(m\mathrm{M}_p)$.

Nous appellerons cette aléatoire l'approximation équipollente d'ordre m de l'aléatoire dont les m premiers moments sont les valeurs (12). Par exemple l'aléatoire qui prend avec certitude la valeur zéro est une approximation équipollente d'ordre quelconque de toute aléatoire de révolution imaginaire.

TOPOLOGIE. — *Sur le lemme de Schwarz.*

Note de M. **Max Zorn**, présentée par M. Élie Cartan.

Il est possible de baser une partie considérable de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe (et probablement toute la théorie) sur un petit nombre d'axiomes purement topologiques.

De ces axiomes citons les suivants : les fonctions analytiques sont continues; si elles ne sont pas constantes, elles sont « ouvertes » et localement invertibles à l'exception d'un ensemble *discret* de points « spéciaux »; il existe des fonctions à point spécial isolé; les fonctions bornées uniformément forment une famille normale; pour deux domaines bornés, homéomorphes au cercle, il existe une homéomorphie analytique.

Dans cette Note nous présentons une partie de la théorie qui rattache le lemme classique de H. A. Schwarz à la théorie (topologique) des groupes continus. Nous réduirons ce lemme à la normalité de l'ensemble des fonctions bornées uniformément et à des propriétés élémentaires des fonctions analytiques. Néanmoins, nous n'avons pas obtenu l'équivalent topologique *complet* du théorème; mais nous espérons que l'étude approfondie de la question contribuera à la solution du problème bien plus compliqué de M. Brouwer : caractériser les fonctions analytiques individuellement et non pas *l'ensemble* de ces fonctions.

Les démonstrations, qui sont du reste très simples, paraîtront ailleurs.

I. *Définitions.* — Soient S un espace métrisable, N un ensemble de transformations F de S en sous-ensembles de S satifaisant aux conditions :

A. Les transformations F sont continues $[\lim \mathrm{F}(x_n)$ égale $\mathrm{F}(\lim x_n)]$; elles sont ouvertes (l'image d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert).

B. Les F forment un ensemble normal, c'est-à-dire de tout sous-ensemble infini on peut extraire une suite F_n qui est convergente, improprement divergente ou bien proprement divergente. Nous disons que F_n est propre-

ment divergente si la suite des $F_n(x)$ n'admet de point d'accumulation pour aucun x. F_n est improprement divergente si pour toutes les suites convergentes x_n la limite de $F_n(x_n)$ est un point fixe de S. F_n est dite convergente seulement s'il y a en N une transformation F telle que pour toute suite x_n convergente on ait $F(\lim x_n) = \lim F_n(x_n)$. Dans la terminologie de M. Carathéodory nous aurions convergence continue vers une constante (2ᵉ cas) ou vers un élément de N (3ᵉ cas).

C. a, l'identité I est en N; b, le produit FG, défini par $FG(x) = F[G(x)]$, de deux transformations de N est en N; c, l'égalité $FG = FH$ entraîne $G = H$.

Une transformation R ou R_p de N est une *rotation* si : 1° il y a un point invariant p, $R(p) = p$; 2° R a une inverse en N.

Un élément F pour lequel la suite des itérations F^n est improprement divergente est *nilpotent*.

L'ensemble des points $R_p(q)$ est la *circonférence* L_q. Les sous-ensembles des circonférences seront appelés *rotatoires*.

II. 1° Si pour un ensemble $\{F_a\}$ en N nous avons $F_a(p) = p$, les ensembles $F_a(x)$ sont *limités*, c'est-à-dire à fermeture compacte.

2° *Corollaire*. Les circonférences sont limitées.

En vertu de 6° elles seront compactes elles-mêmes.

Le théorème suivant est le centre de la théorie :

3° *Une transformation* F *à point invariant est une rotation ou bien elle est nilpotente*.

4° *Corollaire*. Une transformation à deux points invariants est une rotation.

5° Les rotations ne sont pas nilpotentes. Au contraire, nous avons le théorème :

6° *Les rotations forment un groupe compact* (*sous la convergence continue*).

III. A partir d'ici nous supposons l'espace S connexe et localement connexe; pour le théorème 8° nous avons besoin de la condition que les points individuels ne décomposent pas l'espace.

Le point p sera toujours le même dans ce qui suit.

Nous allons restreindre l'ensemble par la condition existentielle.

D. Les circonférences L_q séparent l'espace (si $p \neq q$); c'est-à-dire que $S - L_q$ n'est plus connexe.

1° La composante C_q de p en $S - L_q$ a pour frontière L_q. Nous appel-

lerons C_q le *cercle* ouvert déterminé par q, et la fermeture $\overline{C}_q$ le cercle fermé. C_q et $\overline{C}_q$ sont connexes.

2° Les cercles sont invariants par les rotations.

3° *Les cercles sont simplement ordonnés*, c'est-à-dire, de deux cercles il y en a un qui contient l'autre.

Nous introduisons les notations symboliques

$$|x|<|y|, \qquad |x|=|y|, \qquad |x|\leq|y|, \qquad |x|=0$$

pour les relations entre les cercles C_x et C_y; $|x|=0$ signifie $x=p$. Il serait possible, en vertu des théorèmes suivants, d'interpréter les symboles $|x|$ comme nombres positifs.

4° *Toute coupure de Dedekind pour les cercles a un cercle générateur.*

5° *Les cercles fermés sont compacts.*

Comme corollaires nous obtenons :

6° L'espace S est localement compact.

7° L'espace S est demi-compact, c'est-à-dire somme d'une suite d'ensembles compacts.

Le lemme de Schwarz se laisse formuler à peu près comme en théorie des fonctions analytiques :

8° *Pour une fonction* F *à point invariant p nous avons toujours*

$$|F(x)|\leq|x|.$$

L'égalité $|F(q)|=|q|$ *pour un point* $q\neq p$ *entraine la même égalité pour tous les points* x, *et* F *est une rotation.*

Sous cette forme le théorème ne fournit pas encore le lemme classique, car il faut déterminer les circonférences L_q *abstraites*, dans le cas où S est le cercle euclidien, et N l'ensemble des transformations analytiques de S en sous-ensembles de S. Cela se fait par le théorème :

9° *Si l'ensemble* K *est rotatoire, la composante de p en* S — K *limitée et l'espace* S *non compact, alors* K *est une circonférence complète.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la recherche des équations*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

intégrables par la méthode de Darboux. Note de M. **Ernest Vessiot**, présentée par M. Élie Cartan.

Je voudrais indiquer comment les résultats de mes Notes précédentes [1], relatives aux équations $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ dont l'un au moins des systèmes de caractéristiques a deux ou trois invariants du premier ou du deuxième ordre, peuvent s'étendre en cas des invariants d'ordre supérieur à 2, au moyen de la notion générale du *prolongement* des faisceaux.

1. Soient $\mathcal{E}$ l'équation considérée, $\mathcal{F}$ l'un des faisceaux *associés*. Ce faisceau est de degré 4, à sept variables, et sa structure est, avec une base canonique X_1, X_2, X_3, X_4,

$$(1) \quad (X_i, X_j) \equiv 0, \qquad (X_1, X_3) = Z_1, \qquad (X_2, X_4) = Z_2 \qquad (i = 1, 3;\ j = 2, 4).$$

Or tout faisceau de cette structure, à un nombre n quelconque de variables $x_1, \ldots, x_n$, a, par définition, pour *prolongé* tout faisceau aux $(n+2)$ variables $x_1, \ldots, x_{n+2}$ semblable au faisceau

$$X_1 + x_{n+1} X_3, \quad X_2 + x_{n+2} X_4, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}}.$$

Ces prolongés, ayant aussi la structure (1), se prolongent de la même manière, et ainsi de suite. La *classe* qu'ils forment est, d'autre part, la même pour les divers faisceaux $\mathcal{F}$ associés à $\mathcal{E}$. De la classe $(\mathcal{F})$ de ceux-ci se déduisent ainsi les classes successives de leurs prolongés des rangs 1, 2, 3, etc.

On démontre que, pour qu'un faisceau $\mathcal{G}$ appartienne à la classe des prolongés de rang k ainsi associés à une classe $(\mathcal{E})$, convenablement choisie, d'équations $\mathcal{E}$, il faut et il suffit : (A), *que* $\mathcal{G}$ *soit un faisceau de degré* 4, *à* $2k+7$ *variables, de la structure* (1); (B), *que les dérivés successifs* $\mathcal{G}', \mathcal{G}'', \ldots, \mathcal{G}^{(k+1)}$ *de* $\mathcal{G}$ *soient des degrés* $6, 8, \ldots, 2k+6$, *et que* $\mathcal{G}', \mathcal{G}'', \ldots, \mathcal{G}^{(k)}$ *aient des sous-faisceaux caractéristiques* [2], *des degrés* $2, 4, \ldots, 2k$, *qui appartiennent respectivement à* $\mathcal{G}, \mathcal{G}', \ldots, \mathcal{G}^{(k-1)}$.

---

[1] *Comptes rendus*, **205**, 1937, p. 643, et **206**, 1938, p. 92.

[2] Si un faisceau F, à n variables, a des transformations distinguées, celles-ci constituent un sous-faisceau C de F, qui est son *sous-faisceau caractéristique*. Soit

Ces conditions étant remplies, *la classe des faisceaux $\mathcal{F}$, dont $\mathcal{G}$ est un prolongé de rang k est celle des réduits de $\mathcal{G}^{(k)}$*. Les diverses classes $(\mathcal{E})$ d'équations $\mathcal{E}$ correspondent ainsi, d'une manière univoque, aux diverses classes de faisceaux $\mathcal{G}$, à un même nombre quelconque $2k+7$ de variables, satisfaisant à ces conditions A et B.

Par ailleurs, les invariants éventuels d'ordre égal ou inférieur à $k+2$ d'un système de caractéristiques de $\mathcal{E}$ sont ceux d'un sous-faisceau singulier de l'un des prolongés $\mathcal{G}$, de rang k, de $\mathcal{F}$. La recherche des classes $(\mathcal{E})$ intégrables par la méthode de Darboux est donc ramenée à celle des classes $(\mathcal{G})$ de faisceaux $\mathcal{G}$, satisfaisant aux conditions A et B, pour lesquels l'un au moins des sous-faisceaux singuliers a deux invariants indépendants.

2. 1° Ces classes sont celles dont un représentant est du type

$$(\mathcal{G}_1)\quad \mathfrak{X}_1 = \xi_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad \mathfrak{X}_3 = \eta_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(\mathcal{G}_2)\quad \mathfrak{X}_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 Zf, \qquad Zf = \zeta_\alpha(x_1, \ldots, x_n; v)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \qquad \mathfrak{X}_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

avec $n = 2k+5$, $\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_3\}$ admettant un groupe continu G_1 fini ou infini, et Zf étant, pour chaque valeur numérique de v, une transformation infinitésimale de ce groupe.

2° Si $\mathcal{G}_2$ a lui-même des invariants, ils sont indépendants de v_0 et l'on peut supposer qu'ils ne dépendent pas de v; ce sont alors, quel que soit v, des invariants de Zf.

3° Si Zf appartient, quel que soit v, à un même groupe continu fini de l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$, les deux systèmes de caractéristiques ont une infinité d'invariants, et réciproquement.

3. Un cas particulier important, car il se présente, en particulier, pour les équations $\mathcal{E}$ qui ont une intégrale générale explicite, est celui où $\mathcal{G}_1$ est *intégrable*. Il est alors réductible à la forme

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + p_1\frac{\partial f}{\partial p} + \ldots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_{m-1}}, \qquad \mathfrak{X}_3 = \frac{\partial f}{\partial p_m} \qquad (m = 2k+2),$$

et Zf est le prolongement, à l'ordre $(m+1)$, d'une transformation de

---

$q = n - p$ le degré de C. En prenant comme variables des invariants $u_1, \ldots, u_p$ de C, on peut ramener la base de F à la forme $X_1, \ldots, X_n, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_q}$, où $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est un faisceau de l'espace $(u_1, \ldots, u_p)$, qui est dit un *réduit* de F.

contact infinitésimale T du plan (x, z), dont la fonction caractéristique. $\theta(x, z, p; v)$, dépend du paramètre v.

Les cas où les deux systèmes de caractéristiques ont alors une infinité d'invariants sont ceux où θ est de la forme $\theta = \psi_\alpha(v)\,\theta_\alpha(x, z, p)$, les θ_i étant les fonctions caractéristiques des transformations infinitésimales de base d'un groupe fini de transformations de contact du plan. Les types de ces groupes ayant été donnés par S. Lie, ces θ_i sont connus pour chacun de ces types, et il reste seulement à assujettir les coefficients $\psi_i(v)$ aux relations différentielles qui expriment que $\mathcal{G}$ satisfait aux conditions B. Ces relations sont compatibles pour tous les types.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Applications d'un théorème sur les arguments des singularités.* Note de M. **Szolem Mandelbrojt**, présentée par M. Paul Montel.

Le théorème que j'ai démontré récemment sur les arguments des singularités situées sur le cercle de convergence ([1]) permet d'énoncer la proposition suivante :

Soit $f(z) = \Sigma a_n z^n$ une série de Taylor dont le rayon de convergence est égal à un. S'il existe une suite d'entiers positifs $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ tels que $\lim \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = 1$, *et tels que les polynomes $d_{n_k}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, où*

$$d_n(t) = a_n + C_n^1 a_{n-1} t + \ldots + a_0 t^n,$$

ne s'annulent pas dans un cercle de rayon non nul (indépendant de k) autour de l'origine. $f(z)$ admet au moins un point singulier d'affixe $e^{i\varphi}$ tel que

$$\cos\varphi \geqq \overline{\lim_{k=\infty}}\, \mathcal{R}\frac{a_{n_k-1}}{a_{n_k}} \quad ([2]).$$

Soit $\{m_j\}$ une suite extraite de la suite $\{n_k\}$ telle que

$$\lim_{j=\infty} \mathcal{R}\frac{a_{m_j-1}}{a_{m_j}} = \overline{\lim_{k=\infty}}\, \mathcal{R}\frac{a_{n_k-1}}{a_{n_k}} = a.$$

A étant une constante telle que $|a_n| < A^n$ $(n > 0)$, on a

$$|d_{m_j}(t)| < A^{m_j} + C_{m_j}^1 A^{m_j-1}|t| + \ldots + |t|^{m_j} = (A + |t|)^{m_j}.$$

([1]) *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1456.

([2]) $\mathcal{R}z$ désigne la partie réelle de z.

Nous posons $|a_0| < 1$. Dans le cercle $|t| < \delta$, où les polynomes $d_{n_k}(t)$ ne s'annulent pas, les fonctions $[\log d_{m_j}(t)]/m_j$ (avec $|\operatorname{Arg} d_{m_j}(0)| \leq \pi$) sont holomorphes et leurs parties réelles sont bornées par la quantité $\log(A+\delta)$. D'après la théorie de M. Montel, on peut extraire de la suite $\{m_j\}$ une suite $\{\mu_k\}$ telle que la suite

$$D_k(t) = \frac{\log d_{\mu_k}(t)}{\mu_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

tende uniformément, dans $|t| < \delta - \varepsilon$ (ε positif arbitraire), vers une fonction holomorphe $D(t)$. On a d'ailleurs

$$\mathcal{R} D(0) = \mathcal{R} \lim D_k(0) = \lim \frac{\log|d_{\mu_k}(0)|}{\mu_k} = \lim \frac{\log|a_{\mu_k}|}{\mu_k} = 0.$$

Or $D'_k(t) = [d'_{\mu_k}(t)]/[\mu_k d_{\mu_k}(t)]$; et, comme $d'_n(t) = n\, d_{n-1}(t)$, on a, uniformément dans $|t| < \delta - \varepsilon$

$$\lim_{k-\infty} D'_k(t) = \lim \frac{d_{\mu_k-1}(t)}{d_{\mu_k}(t)} = D'(t).$$

On a aussi

$$D'(0) = \lim_{k=\infty} \frac{d_{\mu_k-1}(0)}{d_{\mu_k}(0)} = \lim \frac{a_{\mu_k-1}}{a_{\mu_k}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R} D'(0) = a.$$

D'après le théorème concernant les arguments des singularités, il existe un point singulier $e^{i\varphi}$ (qui est, sur $|z| = 1$, le plus rapproché du point *un*) tel que

$$\cos\varphi = R'_+(0) = \lim_{t \to +0} \frac{R(t) - 1}{t},$$

où

$$R(t) = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|d_n(t)|}.$$

On peut aussi écrire

$$\cos\varphi = [\log R(t)]'_{+0} = \lim_{t \to +0} \frac{\log R(t)}{t};$$

et, comme

$$R(t) \geq \lim_{k=\infty} \sqrt[\mu_k]{|d_{\mu_k}(t)|},$$

on a

$$\cos\varphi \geq \lim_{t \to +\infty} \frac{\log\left[\lim_{k=\infty} \sqrt[\mu_k]{|d_{\mu_k}(t)|}\right]}{t} = \lim_{t \to +0} \frac{\mathcal{R} D(t)}{t} = \mathcal{R} D'(0) = a,$$

et notre théorème est démontré.

Il est facile de voir qu'un polynome $1 + b_1 z + \ldots + b_n z^n$ ne s'annule pas

dans le cercle de rayon $1/2 \min\limits_{1 \leq k \leq n} \sqrt[k]{|b_k|^{-1}}$ autour de l'origine. Ainsi, le polynome $d_{n_k}(t)$ ne s'annule pas dans le cercle

$$|t| \leq \delta_k = \frac{1}{2} \min_{0 \leq m \leq n_k} \sqrt[n_k - m]{|a_{n_k}|(|a_m| C_{n_k}^m)^{-1}}.$$

Il suffit donc qu'il existe une constante α, indépendante de k et de m, telle qu'on ait

$$|a_m| C_{n_k}^m < \alpha^{n_k - m} |a_{n_k}| \qquad (m < n_k),$$

pour qu'aucun polynome $d_{n_k}(t)$ ne s'annule dans le cercle de rayon $1/2\alpha$ autour de l'origine, et pour que la conclusion du théorème précédent s'applique; mais, dans ce cas particulier, on a $\lim(a_{n_k-1}/a_{n_k}) = 0$, et l'on peut affirmer qu'il existe au moins un point singulier $e^{i\varphi}$ tel que $\cos\varphi \geq 0$. Il existe donc au moins un point singulier sur l'arc $|\varphi| \leq \pi/2$, et, en général, sur tout arc de longueur π. $f(z)$ admet ainsi au moins deux points singuliers, sur le cercle de convergence. Une telle constante α existe, en particulier, si $|a_{n_k}| > d > 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) et si $a_{n_k-1} = a_{n_k-2} = \ldots = a_{n_k-p_k} = 0$ avec $p_k/n_k > \lambda > 0$ ($k = 1, 2, \ldots$). On peut donc tirer du théorème précédent la conclusion suivante :

Si la série de Taylor $f(z) = \Sigma a_n z^{\lambda_n}$ admet un rayon de convergence égal à un, *et s'il existe une suite $\{n_j\}$ telle que*

$$\frac{\lambda_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_j}} > \lambda_1 > 1, \tag{1}$$

$$|a_{n_{j+1}}| > d > 0, \tag{2}$$

$f(z)$ admet sur le cercle de convergence, au moins un point singulier sur tout arc de longueur π. Elle admet donc, sur le cercle de convergence, au moins deux points singuliers.

On ne peut pas tirer la conclusion précédente de la seule inégalité (1), c'est-à-dire si (2) n'a pas lieu. Il suffit de remarquer que la série bien connue $\sum \left[\frac{z(z+1)}{2}\right]^{m_j}$ $\left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \to \infty\right)$ admet un seul point singulier sur $|z| = 1$.

Le théorème du début de la Note subsiste si l'on y remplace les polynomes $d_n(t)$ par les dérivées $f^{(n)}(z)$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions indéfiniment dérivables sur tout l'axe réel.* Note de M. **Ayzyk Gorny**, présentée par M. Paul Montel.

Le but de cette Note est d'étendre aux fonctions représentables par l'intégrale de Stieltjès $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,dV(t)$, où $V(t)$ est une fonction *croissante* et bornée de t, certains résultats énoncés par M. Mandelbrojt [1] pour les classes $C\{m_n\}$, et notamment ceux qui concernent les fonctions périodiques d'une telle classe. Une fonction indéfiniment dérivable $f(x)$ appartient, comme on sait, à la classe $C\{m_n\}$ si elle satisfait, avec ses dérivées, aux inégalités

$$|f^{(n)}(x)| < k^n m_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nous donnons d'abord des conditions nécessaires et suffisantes permettant d'affirmer qu'une fonction $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,dV(t)$ appartient à la classe $C\{m_n\}$. Ces conditions s'expriment au moyen de la fonction $T(r) = \max_{n \geqq 0} r^n/m_n$, dont l'importance pour l'étude de ces questions a été soulignée par M. Mandelbrojt.

Théorème. — *Si la fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable sur tout l'axe réel et représentable par l'intégrale de Stieltjès $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,dV(t)$, où $V(t)$ est croissante et bornée, appartient à la classe $C\{m_n\}$, $V(t)$ satisfait à l'inégalité*

$$(1) \qquad V(t+1) - V(t) < \frac{C}{T\left(\frac{t}{k}\right)},$$

C et k étant des constantes indépendantes de t.

Réciproquement, si (1) est vérifié, la fonction $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\frac{dV}{1+t^2}$ appartient à la classe $C\{m_n\}$.

Les applications de ce théorème aux recherches concernant les classes $C\{m_n\}$, sont analogues à celles qu'on tire, dans le cas des fonctions

(1) *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions*, Paris, 1935, p. 78 et suiv.

périodiques, de l'évaluation des coefficients de Fourier au moyen de la fonction $T(r)$. Les énoncés ainsi obtenus sont analogues à ceux de M. Mandelbrojt.

La démonstration du théorème précédent repose sur le lemme suivant :

LEMME. — *Si la fonction* $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,dV(t)$, $V(t)$ *étant une fonction à variation bornée, possède une dérivée* $n^{ième}$ *bornée* $|f^{(n)}(x)|<M_n$, on a

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int_{t}^{t+\alpha}d\xi\int_{\xi}^{\xi+\alpha}t^n\,dV\right|<2M_n.$$

Il résulte de ce lemme que :

1° $f(x)$ satisfaisant aux mêmes hypothèses, on a

(2) $$|V(t+0)-V(t-0)|<\frac{2M_n}{|t|^n};$$

2° si $V(t)$ est une fonction croissante (non décroissante) on a l'inégalité

(3) $$V(t+1)-V(t)<\frac{CM_n}{t^n},$$

où C est indépendant de t.

3° Si $f(x)$ est indéfiniment dérivable et possède des dérivées bornées, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,dV(t)$ existent, et on a la relation

$$f^{(n)}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(it)^n e^{itx}\,dV(t).$$

Remarquons d'ailleurs que l'existence d'une borne supérieure pour une dérivée d'ordre quelconque entraîne, dans notre cas, l'existence d'une borne analogue pour les dérivées d'ordre inférieur.

Voici quelques indications sur la démonstration du lemme.

Soit

$$\varphi_n(x,\delta)=\frac{\Delta_n f(x)}{\delta^n}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\left(\frac{e^{it\delta}-1}{\delta}\right)^n dV(t).$$

On a

$$|\varphi_n|<2M_n,\qquad \varphi_n\left(\frac{e^{-i\alpha x}-1}{-ix}\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,W(t,\alpha,\delta)\,dt,$$

où

$$W(t,\alpha,\delta)=\int_{t}^{t+\alpha}d\xi\int_{\xi}^{\xi+\alpha}\left(\frac{e^{it\delta}-1}{\delta}\right)^n dV(t).$$

La fonction $W(t)$ est, comme on le voit facilement, absolument intégrable.

En appliquant la transformation de Fourier, on trouve

$$W(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n\left(\frac{e^{-i\alpha x}-1}{-ix}\right)^2 e^{-itx}\,dx, \quad |W(t)| < \frac{2M_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{-i\alpha x}-1}{-ix}\right|^2 dx = 2M_n\alpha.$$

Finalement, en faisant tendre δ vers o, on en conclut que

$$\left|\frac{1}{\alpha}\int_t^{t+\alpha} d\xi \int_\xi^{\xi+\alpha} t^n\, dV(t)\right| < 2M_n.$$

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les directions de Borel des fonctions algébroïdes méromorphes d'ordre infini.* Note de M. **Georges Valiron**, présentée par M. Émile Borel.

Soit $u(z)$ une fonction algébroïde méromorphe définie par l'équation

$$\psi(u) \equiv f_\nu u^\nu + \ldots + f_0 = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions entières données de z, n'ayant pas de zéros communs. Sa fonction caractéristique $T(r, u)$ est donnée par

$$T(r, u) = \frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{2\pi}\sum_1^\nu \int_0^{2\pi} \log^+ |u_q(re^{i\varphi})|\, d\varphi + N(r, f_\nu)\right] \quad (^1),$$

les u_q étant les branches de $u(z)$. L'ordre, l'ordre réel, se définissent pour $\nu > 1$ comme pour $\nu = 1$. L'introduction de cette fonction a permis d'étendre aux algébroïdes méromorphes les résultats relatifs à la distribution circulaire des points où une fonction méromorphe prend une valeur donnée arbitraire. L'étude des arguments de ces points (directions de Julia et de Borel) est moins avancée ([2]). Je considérerai ici ces directions dans le cas de l'ordre infini.

1. L'étude de $u(z)$ dans un angle Λ de sommet origine peut se ramener

---

([1]) Voir mes Notes, *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 623, 728, 824. $N(r, f)$ est relatif aux zéros.

([2]) M. Rauch, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 2041-2043, a donné, pour l'ordre fini et $f_\nu \equiv 1$, des propositions qui ne semblent pas définitives en ce qui concerne le nombre des valeurs exceptionnelles.

à celle d'une fonction algébroïde dans un cercle Γ en procédant comme je l'ai fait pour les fonctions méromorphes d'ordre fini (*Acta math.*, 47, 1925, p. 136); si $u(z) - b$ est d'ordre réel infini dans un angle intérieur à Λ, sa transformée est d'ordre infini dans Γ, le théorème de Borel généralisé s'applique. Par suite, si l'on suppose que $V(r)$ étant une fonction croissante, à croissance normale, d'ordre infini, l'ordre réel des zéros de $u(z) - x$ est au moins celui de $V(r)$ dans tout angle Λ d'ouverture positive admettant $\varphi = \arg z = \varphi_0$ pour bissectrice, *et ceci pour une valeur de x*; dans tout angle Λ de bissectrice φ_0 l'ordre réel des zéro de $u(z) - x$ sera au moins celui de $V[r(1 - \varepsilon(r)]$ *pour tous les x sauf 2ν valeurs au plus*, $\varepsilon(r)$ tendant vers 0 avec $1/r$. En particulier, *il existe des directions de Julia d'ordre infini*.

2. Introduisant la notion précise d'ordre comme dans ma Note précédente ([3]), on peut démontrer l'existence des directions de Borel. Il suffit à cet effet d'étendre au cas des algébroïdes la théorie de Nevanlinna que j'avais utilisée ([4]). $A(r, f)$, $B(r, f)$, $C(r, f)$ étant les fonctions de Nevanlinna (voir la Note citée), on posera

$$S(r, u) = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{\nu}^{1}[A(r, u_q) + B(r, u_q)] + C(r, f_\nu)\right].$$

Si $f^{\star}$ désigne, pour chaque z, le maximum des $|f_k(z)|$ ($k = 0, \ldots, \nu$), on a encore (dans l'ordre d'idées de H. Cartan)

$$(1)\quad \begin{cases} S(r, u) = \frac{1}{\nu}[A(r, f^{\star}) + B(r, f^{\star}) - A(r, 1/f^{\star}) - B(r, 1/f^{\star})] + O(1), \\ S(r, u) = \frac{1}{2\pi\nu}\int_0^{2\pi} C[r, \psi(e^{i\theta})]\, d\theta + O(1). \end{cases}$$

On en déduit pour $S(r, u)$ les mêmes conséquences que pour $T(r, u)$: invariance à $O(1)$ près par une transformation homographique à coefficients constants effectuée sur $u(z)$; croissance de $S(r, u) + O(1)$; et, mettant dans (1) une moyenne superficielle, on voit presque sans calculs que $C[r, \psi(a)]/S(r, u)\,\nu$ tend vers un si r croît indéfiniment, pour les a extérieurs à un ensemble de mesure superficielle nulle (sur la sphère) (l'ensemble exceptionnel devant pouvoir être remplacé par un ensemble de mesure

(3) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 575-577.

(4) La formule fondamentale de cette théorie peut être obtenue par l'intégration convenable de $\log f(z)[z^{-k} - z^k r^{-2k}]$.

nulle par la méthode de M. Ahlfors). En suivant les méthodes habituelles (voir ma première Note citée) on montre que, p étant un entier supérieur à 2ν, on a l'inégalité suivante qui étend celle de M. Nevanlinna

$$\nu(p-2\nu)\,S(r, u) < \sum_{j=1}^{p} C[r, \psi(b_j)] + h(r),$$

$$h(r) = K_{p,\nu}[A(r, \theta_{p,\nu}) + B(r, \theta_{p,\nu})] + O(1), \qquad \theta_{p,\nu} = \sum_{q,j} \log^{+}\left|\frac{u'_q}{u_q - b_j}\right|,$$

les b_j étant p nombres distincts dont l'un peut être infini. La majoration de $B(r, \theta_{p,\nu})$ se fait comme pour $\nu = 1$ en utilisant la borne de $m(r, u'/u)$ (5). Pour $A(r, \theta_{p,\nu})$ on peut supposer pour l'objet actuel que les côtés de l'angle dans lequel on opère ne coupent plus, pour r' assez grand, les cercles ayant pour centres, de modules r', les zéros de $f_\nu(z)$, $f_0(z)$ et les points de ramification, et ayant pour rayon $U(r')^{1+\delta}$, $U(r)$ étant la majorante de $T(r, u)$ définie comme dans la Note précédente. Alors l'inégalité (18) du mémoire cité est valable et $h(r) = O[\log U(r)]$. On voit ainsi que, comme pour $\nu = 1$, *le coefficient $k(\varphi_0, b)$ de l'ordre réel des zéros de $u(z) - b$ dans une direction φ_0 donnée arbitraire a la même valeur $k(\varphi_0)$ pour tous les b, sauf pour 2ν valeurs au plus pour lesquelles il est moindre que $k(\varphi_0)$*. En particulier, les directions de Borel existent, mais on n'a pas obtenu de cercles de remplissage.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les singularités d'une fonction analytique définie par un élément.* Note de M. **Arnaud Denjoy**, présentée par M. Paul Montel.

Considérons les éléments de fonctions analytiques

$$f_0(z) = \Sigma a_n z^n, \qquad g_0(z) = \Sigma a_n z^{-n} \qquad (n > 0).$$

Avec M. G. Polya (1), introduisons la fonction entière $F(v)$ associée à $g_0(z)$

(5) *Bulletin de la Soc. Math.*, 59 1931, p. 17-39.

(1) *Math. Zeitschrift*, 29, 1929, p. 550-640. Consulter également S. Mandelbrojt, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1456; A. Denjoy, *ib.*, 204, 1937, p. 1611, et 205, 1937, p. 453.

et son exposant modulaire radial $p(\theta)$,

$$F(v)=\sum_{p=0}' \frac{a_{p+1}}{p!} v^p, \qquad p(\theta)=\overline{\lim_{\lambda\,\infty}} \frac{1}{\lambda} \log|F(\lambda e^{-i\theta})|.$$

$p(\theta)$ a une dérivée droite, une dérivée gauche; $p'(\theta \pm 0)$ est continue unilatéralement en chaque point. On a

$$\log|F(\lambda e^{-i\theta})| < \log M(\varepsilon) + \lambda[p(\theta)+\varepsilon] \qquad [M(\varepsilon) \text{ étant indépendant de } \lambda \text{ et de } \theta].$$

Soit $\Delta(\theta)$ la droite d'équation $z=e^{i\theta}[p(\theta)+it]$ (t réel quelconque), dont la région positive $\Delta^+(\theta)$ s'obtient en remplaçant $p(\theta)$ par un nombre supérieur quelconque. La réunion des $\Delta^+(\theta)$ forme une région infinie Q limitée par une courbe convexe V (éventuellement réduite à un segment ou à un point). Dans Q, $g_0(z)$ est prolongeable en une fonction holomorphe $g_1(z)$; $e^{i\theta}[p(\theta)+ip'(\theta\pm 0)]$ définit les points extrêmes (généralement confondus) du segment commun à V et à $\Delta(\theta)$. Ce sont les points *principaux* de V, tous singuliers pour g_1. En particulier tous les points singuliers de g_0 sont principaux sur V. Ceux qui se trouvent sur le cercle de convergence $\Gamma(u)$ de la série

$$g_0(z)=\sum \frac{\delta_n(u)}{(z+u)^n}, \qquad \text{avec} \quad \delta_{n+1}(u)=a_{n+1}+C_n^1 a_n u+\ldots+C_n^n a_1 u^n$$

s'obtiennent par la règle de M. Mandelbrojt.

I. Un point principal *isolé* de V, soit $\zeta=\rho e^{-i\psi}$ est caractérisé par le fait que $p(\theta)=\rho\cos(\theta-\psi)$ sur tout un intervalle majeur $\theta_1<\theta<\theta_2$. V renferme deux segments rectilignes majeurs $\zeta'\zeta$, $\zeta\zeta''$. Dans l'angle (θ_1, θ_2) la méthode de M. Polya ne donne pas d'autre singularité que ζ pour le prolongement de g_0. Mais dans certains cas, particulièrement si, au point ζ, g_1'/g_1 a un pôle simple de résidu β, ou si $g_1^{(m)}(z)$ (m minimum) est méromorphe, et infini d'ordre k, on peut, en déterminant la croissance radiale d'une fonction entière analogue à $F(v)$ dans l'angle $\theta_1<\theta<\theta_2$, substituer entre ζ' et ζ'', à la ligne brisée $\zeta'\zeta\zeta''$ de V l'arc convexe d'une courbe V_2, arc dont les points principaux seront singuliers pour le prolongement g_2 de g_1 entre V et V_2. Posons, pour le premier type de singularité citée,

$$F_\alpha(\zeta, v)=\sum \frac{\delta_p(-\zeta)}{\Gamma(p+\alpha)} v^p, \qquad p_\alpha(\theta)=\overline{\lim_{\lambda\,\infty}} \frac{1}{\lambda} \log|F_\alpha(\zeta, \lambda e^{-i\theta})|.$$

Dans l'angle $\theta_1<\theta<\theta_2$, l'exposant $p_\alpha(\theta)$ est nul si $\beta-\alpha$ n'est pas entier positif ou nul. Dans ce dernier cas, $p_\alpha(\theta)<0$ et les points

$$e^{i\theta}[p_\alpha(\theta)+ip'_\alpha(\theta\pm 0)] \; (\theta_1<\theta<\theta_2)$$

définissent les points principaux sur l'arc correspondant de V_2.

Dans cet ordre d'idées, si $f_0(z)$ est une fonction entière, un zéro $1/\zeta$ de $f_0(z)$ est caractérisé par la condition

$$\overline{\lim_{\lambda\infty}}\frac{1}{\lambda}\log\left|\sum\frac{\delta_p(-\zeta)}{p!}\lambda_p e^{-ip\psi}\right| = -p.$$

On aurait les zéros d'ordre $k>1$, en remplaçant le dénominateur $p!$ par $(p+k-1)!$. La relation ci-dessus vérifiée par la fonction

$$\sum\frac{\delta_{p+1}(-\zeta)(p+1)\dots(p+m)}{(p+m+k)!}v^p,$$

caractérise le cas où $g_1^{(m)}$ est méromorphe d'ordre k au point ζ.

Si ζ_1 est un point principal isolé de V_2 correspondant à l'intervalle $\theta'_1<\theta<\theta'_2$ (inclus dans θ_1, θ_2) et si la singularité de g_2 au point ζ_1 est analogue aux précédentes, on peut éliminer ζ_1 et substituer à la ligne brisée $\zeta'_1\zeta_1\zeta''_1$ de V_2 un arc d'une courbe convexe V_3. Par exemple si g_1 et g_2 sont aux points ζ et ζ_1 quasi réguliers d'ordre β et β_1,

$$\left(1-\frac{\zeta-\zeta_1}{z-\zeta_1}\right)^{-\beta}\sum\frac{\delta_n(-\zeta)}{(z-\zeta_1)^n}$$

est d'ordre zéro au point ζ et $\beta+\beta_1$ au point ζ_1. On voit immédiatement l'application indéfinie de la méthode, avec une grande diversité de modes, et son extension à des singularités de types donnés quelconques permettant de poursuivre l'étude du prolongement de g_0 dans la plus grande région infinie limitée par un contour convexe et où la fonction ne possède que des points singuliers isolés de types étudiés.

II. Soient $u=he^{i\theta}$ et $R(\theta, h)=\overline{\lim_{n=\infty}}\sqrt[n]{|\delta_{n+1}(u)|}$ le rayon de $\Gamma(u)$. Quand h croît indéfiniment, θ restant fixe, R a pour partie principale $h+p(\theta)+\mu/2h$, μ étant le plus grand des deux nombres $p'^2(\theta\pm 0)$. ε positif étant donné, soient $N(\varepsilon, h)$, $N'(\varepsilon, h)$, $n_k(\varepsilon, h)$, $n'_k(\varepsilon, h)$ des nombres tels que : 1° pour $n>N(\varepsilon, h)$ ou $N'(\varepsilon, h)$,

$$|\delta_{n+1}(u)|<[h+p(\theta)+\varepsilon]^n \quad \text{ou} \quad <\left(h+p+\frac{\mu+\varepsilon}{2h}\right)^n.$$

2° Pour $n=n_k(\varepsilon, h)$ ou $=n'_k(\varepsilon, h)$,

$$|\delta_{n+1}(u)|>(h+p-\varepsilon)^n \quad \text{ou} \quad >\left(h+p+\frac{\mu-\varepsilon}{2h}\right)^n.$$

On constate que les lois d'après lesquelles $\log|F(v)|$ s'approche de son expression asymptotique maximum $\lambda p(\theta)$ dans un angle infiniment petit bissecté par la droite $v=\lambda e^{-i\theta}$, permettent d'exprimer N, N' et de définir des champs numériques où se trouvent nécessairement les rapports λ_k et λ'

des nombres n_k, n'_k à h. Ainsi, *les λ'_k sont parmi les nombres λ' vérifiant cette condition :*

Sur tous les arcs de cercles ayant leurs centres à l'origine des v et définis par les conditions

$$-\alpha\frac{\sqrt{\varepsilon}}{h} < \frac{|v|}{\lambda'} - 1 < \alpha\frac{\sqrt{\varepsilon}}{h}, \qquad -\frac{\sqrt{\mu}+\beta\sqrt{\varepsilon}}{h} < \operatorname{Arg}(v\, e^{i\theta}) < \frac{\sqrt{\mu}+\beta\sqrt{\varepsilon}}{h},$$

le maximum de $|v|^{-1}\log|F(v)|/M(\varepsilon/h)$ *surpasse* $p(\theta)+\sqrt{\mu-\gamma\varepsilon}/h$, α, β, γ *étant positifs indépendants de* ε *et de* h, α *pouvant être choisi,* β *et* γ *en résultant.*

ASTRONOMIE STELLAIRE. — *Les étoiles multiples spectroscopiques* 52 *et* 58 *Persée*. Note [1] de M. **Raymond Tremblot**, présentée par M. Ernest Esclangon.

L'observatoire de Harvard College a signalé l'existence d'un certain nombre d'étoiles à *spectre composite*, dont la plupart constituent effectivement des systèmes binaires visuels ou spectroscopiques; mais, dans ce dernier cas, la mesure de la vitesse radiale de la composante la moins brillante ne peut généralement s'effectuer avec une précision satisfaisante. Il ne semble pas en être ainsi pour deux étoiles de la constellation de Persée [2], dont nous avons obtenu quelques spectrogrammes, s'étendant au proche ultraviolet et montrant les raies bien définies de plusieurs composantes.

58 Persée, de type spectral $K_0 + A_3$ d'après le *Draper Catalogue*, $c\,G_2$, d'après une publication plus récente de l'observatoire du Mont Wilson, a été reconnue depuis longtemps comme double spectroscopique à très longue période; une orbite, calculée en 1932 par R. F. Sanford [3], d'après les mesures des observatoires Lick et du Mont Wilson, se trouve en désaccord avec les dernières observations de l'auteur.

D'après nos spectrogrammes obtenus de 1934 à 1938 à la station de Haute-Provence de l'Observatoire de Paris, dont la dispersion est de 16 Å par millimètre vers 3950 Å, les caractères de cet astre ne diffèrent du type

(1) Séance du 28 février 1938.

(2) Et pour l'intéressante étoile triple β Capricorne.

(3) J. H. Moore, *Lick Observatory Bulletin*, n° 483, 1936, p. 7.

$c\,G_2$ que par l'absence des bandes [H] et [K] du calcium, remplacées par des raies fines et fortement contrastées. Ils accusent la superposition des rayonnements de deux étoiles, dont la plus faible, appartenant vraisemblablement au type A_0, ne présente pas un fond continu assez intense pour modifier sensiblement l'aspect des raies métalliques de l'astre principal. Les mesures suivantes justifient cette hypothèse, si l'on admet que la vitesse radiale du centre des masses diffère peu de + 4,2 km-sec, valeur adoptée par Sanford, mais que la période dépasse largement 17 ans.

		Composante $c\,G_2$.	Composante A.
		km-sec	km-sec
1934.	Décembre 30 [4]	+15,6	−21,7
1937.	Août 26	+ 7,6	+ 0,5
	Septembre 3	+10,1	+ 3,4
	Septembre 6	+ 8,0	+ 1,7

L'étude complète du système ne pourra sans doute être terminée avant une vingtaine d'années.

52 Persée, de type $G_0 + A_5$ d'après le Draper Catalogue, $c\,G_3$ d'après le Mont Wilson, n'a encore fait l'objet que d'un petit nombre de mesures. Celles de l'observatoire Lick indiquent un maximum voisin de + 16 km-sec pour la vitesse radiale de la composante principale, une période de quelques années et une amplitude au moins égale à 30 km-sec. Nos spectrogrammes montrent encore les caractères observés sur 58 Persée, mais les raies [H] et [K] accusent ici un mouvement orbital à courte période; elles apparaissent successivement doubles, puis larges et diffuses, sur deux clichés obtenus à cinq jours d'intervalle.

Les mesures de vitesse radiale notées ci-dessous montrent qu'il s'agit très vraisemblablement d'un système triple analogue à celui de 113 Hercule [5], d'une étude d'ailleurs plus facile, la raie [K] de l'une des composantes de type A pouvant être repérée avec précision sur plusieurs spectrogrammes.

		Composantes $c\,G_3$.		Composantes A.	
		h m	km/sec		
1936.	Août 27	3.00	− 7,9	-	-
1937.	Septembre 2	3.37	+12,1	+19,5	(sous exposé)
» .	Décembre 28	22.13	+13,4	+14,9	−61,8
1938.	Janvier 2	21.14	+18,5	−45,2	-

---

(4) D'après un spectrogramme à faible dispersion (35 Å par millimètre vers 3950 Å).

(5) R. TREMBLOT, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1309. De nouvelles mesures, effectuées en 1937, ont confirmé nos conclusions.

Les indices de couleur de ces astres, respectivement égaux à 1,34 et à 1,00, surpassent largement ceux des étoiles géantes du même type (malgré la présence de composantes à température plus élevée), anomalie expliquable en partie par l'absorption sélective de l'espace. Des associations analogues, sur la sphère céleste, de systèmes spectroscopiques à caractère exceptionnel, ont déjà été signalées.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Choc entre un neutron de grande énergie et un proton, traité par la méthode d'approximation de Born.* Note de M. **Théodore Kahan**, présentée par M. Louis de Broglie.

Lorsqu'un neutron de grande énergie heurte un proton, par suite de l'interaction combinée du type Heisenberg et du type Majorana, le choc peut se produire, soit dans un état simple, soit dans un état triple ([1]). Dans le cas où l'énergie cinétique E du neutron incident est de beaucoup supérieure au potentiel d'interaction V du système neutron-proton, on peut appliquer, pour l'étude du phénomène et le calcul de la section de choc, la méthode d'approximation de Born qui donne d'excellents résultats lorsque, précisément, $E \gg V$.

Si l'interaction entre neutron $\left(\text{coordonnées } \vec{r}_1\right)$ et le proton $\left(\text{coordonnées } \vec{r}_2\right)$, est $V(r)$, l'équation d'onde du système est $\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}\right)$

$$(\Delta_{r_1} + \Delta_{r_2})\Psi + \frac{8\pi^2 M}{h^2}[E - V(r)]\Psi = 0.$$

Cette équation peut être résolue par la méthode de Born; dans l'approximation zéro, on prend une onde plane pour le neutron, et l'on obtient, en tenant compte du caractère d'échange de l'interaction, pour la section de choc différentielle,

$$(1) \qquad ds = \frac{2\pi^3 m^{*2}}{h^4}\left|\iiint \exp.\left[-i\left(\vec{k} + \vec{k}_1\right)\vec{r}'\right]V(r')\,dx'\,dy'\,dz'\right|^2 \sin\theta\,d\theta,$$

où $\vec{k}$ et $\vec{k}_1$ représentent les vecteurs nombres d'ondes avant et après le choc, et $m^* = m/2$ (m = masse du neutron).

Si nous admettons que le potentiel d'échange a pour expression respec-

---

([1]) T. Kahan, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 415; *Journal de Physique*, 8, 1937, p. 281.

tivement

$$V(r) = -(V_1 + V_2)\exp.\left(-\frac{r}{a}\right) \qquad \text{(état triple)}$$

ou

$$V(r) = -(V_1 - V_2)\exp.\left(-\frac{r}{a}\right) \qquad \text{(état simple)},$$

l'intégrale (1) peut se calculer classiquement. On obtient alors, en posant

$$\left(\vec{k} + \vec{k_1}\right)^2 = K = 2k^2(1 + \cos\theta)$$

et

$$V_1 \pm V_2 = W,$$

$$W\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\Im\, d\Im\int_0^{\infty} r^2\, dr \exp.\left[-r\left(\frac{1}{a} + iK\cos\Im\right)\right]$$

$$= 2\pi W\int_0^{\infty}\frac{\sin Kr}{Kr}\exp.\left(-\frac{r}{a}\right)dr$$

$$= \frac{8\pi W}{a}\frac{1}{\left[K^2 + \frac{1}{a^2}\right]^2}$$

et, par suite,

$$ds = \frac{2\pi^3 m^{*2}}{h^4}\,\frac{64\pi^2 W^2}{a^2}\,\frac{\sin\theta\, d\theta}{\left[K^2 + \frac{1}{a^2}\right]^4} = \frac{32\pi^5 W^2 m^2 \sin\theta\, d\theta}{h^4 a^2\left[4k^4(1 + \cos\theta)^4 + \frac{1}{a^2}\right]^4};$$

or (²)

$$W = \begin{cases} V_1 + V_2 = \dfrac{3,7}{4}\,\dfrac{h^2}{4\pi^2 ma^2}, \\[2ex] V_1 - V_2 = \dfrac{2,6}{4}\,\dfrac{h^2}{4\pi^2 ma^2}. \end{cases}$$

Par conséquent, en négligeant $1/a^2$ dans le crochet,

$$ds = \frac{\pi}{4}\,\frac{a^2 W^4}{E^4}\,\frac{\sin\theta\, d\theta}{[1 + \cos\theta]^4}.$$

La section de choc totale devient, après quelques calculs, en tenant compte de ce que $E/V \gg 1$,

$$s = \frac{8\pi^3}{3}\,\frac{mW^2 a^2}{h^2 E},$$

c'est-à-dire pour une interaction dans l'état triple (spins parallèles),

$$s_{\uparrow\uparrow} = \frac{24,8}{4\pi^2}\,\frac{h^2}{mE} = \frac{16,1.10^{-3}}{E},$$

(²) T. Kahan, *loc. cit.*

d'où l'on tire les valeurs suivantes pour différentes énergies :

E en eV.........	10^8.	10^9.	10^{10}.
$s_{\uparrow\uparrow}$ en cm².......	$10,1.10^{-26}$	$1,0.10^{-26}$	$0,1.10^{-26}$

Pour l'état simple (spins antiparallèles), la section de choc totale sera, pour différentes valeurs de E, par un calcul analogue,

E en eV.......	10^8.	10^9.	10^{10}.
$s_{\uparrow\downarrow}$ en cm².....	$2,4.10^{-26}$	$0,24.10^{-26}$	$0,24.10^{-27}$

Les deux sections de choc totales sont donc dans le rapport de 4,2 à 1 environ. Le choc neutron-proton se produisant dans l'état triple sera donc, dans l'hypothèse admise, environ quatre fois plus efficace que la collision ayant lieu dans l'état simple.

SPECTROGRAPHIE DES RAYONS X. — *Étude de satellites* Lα *pour l'élément* 82 (Pb). Note [1] de MM. **Manuel Valadares** et **Francisco Mendes**, présentée par M. Jean Perrin.

Au cours de l'étude du spectre L de rayons X du plomb, dans le but de le comparer à celui du dépôt actif du radon, nous avons eu l'occasion d'étudier les raies satellites des raies Lα. Comme il y a très peu de résultats concernant les raies satellites de cet élément, nous avons jugé utile de donner, d'ores et déjà, les valeurs obtenues.

Dispositif expérimental. — On a employé comme source de rayons X une ampoule à gaz (modèle de Shearer) dont le vide était fait à l'aide d'une pompe à huile; la tension employée a été, en moyenne, de 35 kV et l'intensité de 8 mA. Un refroidissement intense de l'anticathode était nécessaire, étant donné la température de fusion peu élevée du plomb.

Nous nous sommes servis d'un spectrographe Cauchois à focalisation [2], le spectrographe étant équipé avec un quartz de 2mm d'épaisseur et courbé sur un rayon de 20cm. La dispersion, dans la région étudiée, est de 10 u.x/mm. L'enregistrement des spectres se faisait sur des plaques photographiques (Ilford pour rayons X) qui étaient, par suite, examinées au microphotomètre Zeiss et les mesures réalisées sur les microphotogrammes.

---

(1) Séance du 28 février 1938.

(2) Y. Cauchois, *Ann. de Phys.*, 2e série, 1, 1934, p. 215.

On a pris 12 clichés de la région Lα, de noircissements très différents; le plus faible a été obtenu en quelques minutes, tandis que celui où α_1 est très surexposé a exigé un temps de pose de 16 heures. En effet, on constate que l'observation des satellites n'est pas également aisée sur les différents clichés; ainsi, les raies satellites plus éloignées de α_1 sont plus nettement marquées sur les clichés de noircissement moyen, tandis que les mesures des satellites rapprochées de α_1 demandent, de préférence, des clichés où celle-ci est surexposée.

Résultats. — La bande complexe qui prolonge α_1 du côté des courtes longueurs d'onde a pu être décomposée en les raies dont les longueurs d'onde sont données dans le tableau ci-dessous. Pour les longueurs d'onde de α_1 et α_2, on a pris les valeurs 1172,58 u.x. et 1184,08 u.x. (3). On a employé la notation proposée par M[lle] Cauchois (4) : les raies dont nous ne trouvons pas de comparables parmi les valeurs données, pour les éléments voisins, par M[lle] Cauchois, ont été marquées d'un point d'interrogation.

	λ u.x.	$\Delta\lambda$ à α_1.	ν/R.	$\Delta\nu/R$ à α_1.
α^{v}	1170,7	−1,9	778,39	+1,25
α'	1170,2	−2,4	778,72	+1,58
α^{ix}	1169,1	−3,5	779,45	+2,31
?	1168,4	−4,2	779,92	+2,78
α_{II}^{x}	1168,1	−4,5	780,12	+2,98
α^{x}	1167,4	−5,2	780,59	+3,45
?	1167,1	−5,5	780,79	+3,65
?	1165,6	−6,0	781,79	+4,65
α_{I}^{f}	1173,4	+0,8	776,60	−0,54

Richtmyer et Kaufman (5) ont déjà signalé les raies α^{x}, 1167,85 u. x. et α^{ix}, 1169,29 u. x.

Outre les résultats rapportés dans le tableau ci-dessus on doit encore remarquer ceci. Si l'on détermine la loi de noircissement, pour les rayons X et pour ces fréquences, des plaques photographiques employées, on peut vérifier si la courbe microphotométrique observée dans la région comprise entre α_1 et α_2 est bien celle résultante de l'addition, en chaque point, des intensités de α_1 et de α_2 au même point. On trouve alors que α_2 présente une bande complexe du côté des courtes longueurs d'onde, c'est-à-dire,

(3) SIEGBAHN, *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, 2e Aufl.
(4) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 519.
(5) *Phys. Rev.*, 44, 1933, p. 605.

vers α_1. Cette bande, malgré que son observation soit rendue difficile du fait que son intensité est de beaucoup plus petite que celle qui accompagne α_1, semble avoir une constitution analogue à celle-ci. C'est seulement sur des clichés où α_1 est très surexposée qu'on peut observer cette bande: ceci explique peut-être pourquoi elle n'a pas été observée par les auteurs qui l'on cherchée par la méthode d'ionisation [6].

PHOTOCHIMIE. — *Oxydation photochimique de l'iodure de méthylène; production d'anhydride iodique.* Note de M. **Guy Emschwiller**, présentée par M. Georges Urbain.

L'iodure de méthylène, bien qu'il absorbe fortement les radiations ultraviolettes, est à peine sensible à leur action quand il est seul [1]. Mais il subit une décomposition rapide lorsqu'il est enfermé, en présence d'oxygène, dans un ballon exposé aux radiations d'une lampe à vapeur de mercure. On trouve parmi les produits de cette oxydation de l'iode, de l'aldéhyde formique (qui peut se transformer en son polymère fusible vers 170°), de l'acide formique, de l'oxyde de carbone. J'ai pu aussi séparer et caractériser de l'anhydride iodique [2]; la proportion d'iode retrouvée sous cette forme est appréciable; dans une série d'expériences comparables, elle a été de 6 pour 100 dans un ballon en silice, 7,4 pour 100 dans un ballon en verre pyrex, 8,7 pour 100 dans un ballon en verre ordinaire.

Les quantités d'anhydride iodique formées vont croissant au cours de l'oxydation de l'iodure de méthylène, pour diminuer dès qu'elle est terminée, lentement si l'on abandonne le système à l'abri de la lumière, plus rapidement si l'irradiation est poursuivie (plus vite alors dans de la silice que dans du verre). Cette disparition est due à des actions secondaires des produits de l'oxydation. J'ai constaté, en particulier, que le formol réagit à froid sur l'acide iodique; la présence d'acide formique accélère cette transformation, qui est favorisée par la lumière; aussi bien l'oxydation photochimique de l'iodure de méthylène ne produit-elle plus que de très petites quantités d'anhydride iodique quand on la réalise en présence d'acide formique introduit d'avance en quantité appréciable.

---

(6) F. K. Richtmyer, *Rev. Mod. Phys.*, **9**, 1937, p. 391.

(1) *Comptes rendus*, **199**, 1934, p. 854.

(2) *Bull. Soc. Chim.*, **2**, 1935, p. 1077.

Il n'est pas douteux que la formation d'anhydride iodique soit liée à l'oxydation même de dérivés organiques et non pas à l'apparition photochimique d'iode en présence d'oxygène. On n'a jamais réussi à unir l'iode et l'oxygène sous l'action de la lumière; d'autre part, si d'autres dérivés iodés que l'iodure de méthylène sont capables de fournir de l'anhydride iodique quand ils s'oxydent à la lumière, en moindres quantités toutefois, je n'ai par contre pas observé la production d'anhydride iodique par irradiation de dérivés iodés, tels que les iodures d'éthylène ou d'acétylène, dont la décomposition photochimique est insensible à l'oxygène.

La formation de l'anhydride iodique est vraisemblablement due à l'intervention de composés peroxygénés. J'ai constaté que l'oxydation photochimique du formaldéhyde ou de l'acide formique en présence d'iode s'accompagnait de l'apparition d'anhydride iodique (les quantités produites sont faibles, mais il a pu y avoir consommation d'anhydride iodique par le formaldéhyde ou l'acide formique en excès). Ainsi l'oxydation même du formaldéhyde ou de l'acide formique pourrait être la cause de la production d'anhydride iodique au cours de l'oxydation de l'iodure de méthylène. Pourtant le fait qu'il cesse de se former de l'anhydride iodique dès que l'iodure de méthylène se trouve entièrement oxydé conduit à faire intervenir un peroxyde résultant de l'oxydation directe de l'iodure de méthylène, soit un peroxyde de méthylène, dont l'existence a déjà été supposée par R. A. Gregory et D. W. G. Style (3), soit un peroxyde d'iodométhylène (ou un dérivé iodosé). Amené de la sorte à apprécier la part des divers composés peroxydés éventuels, j'ai reconnu deux faits instructifs.

Les résultats sont différents quand, au lieu d'opérer sur de l'iodure de méthylène enfermé dans un ballon contenant de l'oxygène, on irradie un courant d'oxygène entraînant de la vapeur d'iodure de méthylène. Il se dépose un produit iodé solide, brun, ne semblant pas présenter exactement tous les caractères de l'anhydride iodique, mais réagissant comme lui sur les iodures alcalins en milieu acide. Pour une même quantité d'iodure de méthylène oxydé, le pouvoir oxydant est trois à quatre fois plus faible que dans les expériences précédentes. Comme il ne se fait alors aussi que de petites quantités d'acide formique, on pourrait se croire fondé à conclure que la production d'anhydride iodique est liée directement à l'oxydation du formaldéhyde.

---

(3) *Trans. Faraday Soc.*, **32**, 1936, p. 724.

Mais un autre fait vient montrer combien est complexe l'oxydation photochimique de l'iodure de méthylène en système clos. Introduisant l'iodure de méthylène dans un ballon de silice, j'ai fait circuler assez rapidement de l'oxygène au lieu d'en enfermer; dans ces conditions l'oxydation fut quatre fois plus lente, bien qu'effectuée à la même température. Par conséquent, comme le courant d'oxygène entraîne ici les produits de la réaction, il faut admettre qu'il en est dont la présence accélère l'oxydation de l'iodure de méthylène. L'oxydation en système clos est donc compliquée de phénomènes de catalyse oxydante, qui peuvent aussi intervenir dans une faible mesure dans les expériences par circulation d'oxygène.

A ces phénomènes de catalyse oxydante peut se lier la production plus abondante en système clos d'anhydride iodique. Le rôle catalytique serait ainsi tenu par des oxydes inférieurs de l'iode, non par l'anhydride iodique, sans action sur l'iodure de méthylène. Il ne paraît pas que l'iode puisse intervenir comme sensibilisateur photochimique, à la manière du chlore dans l'oxydation sensibilisée par le chlore du chlorure de méthylène [4].

RADIOCHIMIE. — *Sur le spectre d'émission utraviolet de la dissociation thermique lente de l'azoture de sodium.* Note de M. **René Audubert**, présentée par M. Jean Perrin.

J'ai montré [1] que la thermolyse lente de l'azoture d'argent s'effectuait avec émission d'un rayonnement utraviolet correspondant, dans le domaine étudié, à quatre bandes spectrales situées respectivement aux environs de 1975 Å, 2150 Å, 2300 Å et 2400 Å.

Comme on l'a vu, d'autre part, la dissociation thermique lente des azotures de sodium, potassium, plomb, argent, est accompagnée de processus d'émission indépendants du cation et dont les énergies d'activation sont égales, suivant les cas, soit à 21-26 kil.-cal., soit à 46-50 kil.-cal. L'émission de l'azoture d'argent, dont le spectre a été précédemment étudié, est caractérisée par une énergie d'activation de 46-48 kil.-cal.; il était donc intéressant de préciser le spectre d'une émission ayant une énergie d'activation de 21 à 26 kil.-cal.

L'azoture de sodium présente deux réactions photogéniques possibles : à

(4) W. Brenschede et H.-J. Schumacher, *Z. physik. Chem.*, 177 (A), 1936, p. 245.

(1) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 133.

des températures inférieures à 365°C, l'énergie de la réaction photogénique est de 41-50 kil.-cal., tandis qu'au-dessus de cette température l'énergie d'activation est de 23-25 kil.-cal. Mais l'intensité de l'émission est plus faible que celle de l'azoture d'argent; il est donc nécessaire d'opérer à une température aussi élevée que possible, si bien que les effets mesurés sont dus au processus à plus petite énergie d'activation.

Comme dans les recherches précédentes, l'azoture de sodium, chauffé à température constante, est disposé devant la fente d'entrée d'un monochromateur Jobin et Yvon, à prisme de quartz et à miroir d'aluminure. Devant la fente de sortie, est placé un compteur photoélectrique à cathode de CuI; on a utilisé soit des électrodes de CuICu, soit des électrodes de CuI pur; le maximum de sensibilité se trouve situé à 2100-2150 Å pour les premières et à 2300-2350 Å pour les secondes.

Le domaine exploré était compris entre 2800 et 1890 Å.

Les fentes du monochromateur étaient utilisées avec leur ouverture maximum; malgré cela, la largeur de la bande sortante était assez faible pour permettre une exploration convenable du spectre d'émission.

Le Tableau suivant donne les résultats obtenus,

Longueur d'onde en Å.	ΔN (accroissement de la fréquence des décharges).	$\frac{\text{Écart réel}}{\text{Écart type}}$	Longueur d'onde en Å.	ΔN (accroissement de la fréquence des décharges).	$\frac{\text{Écart réel}}{\text{Écart type}}$
1975.....	$6,5 \pm 2,5$	6,2	2350.....	2 ± 2	1,8
2100.....	2 ± 2	1	2400.....	7 ± 2	8,5
2150.....	$6 \pm 2,0$	6,3	2450.....	$0,8 \pm 2$	1,5
2200.....	$1,8 \pm 2$	1,1	2500.....	3 ± 2	2,1
2250.....	1 ± 2	1,9	2600.....	$0,8 \pm 2$	0,9
2300.....	$10,2 \pm 3,5$	6,4			

Les écarts moyens de fluctuation du nombre des décharges au compteur en l'absence de rayonnement étaient préalablement mesurés; seuls étaient considérés comme positifs les effets correspondant à un accroissement, ΔN, égal au moins à deux fois l'écart moyen à l'obscurité. Dans les cas douteux, un très grand nombre d'expériences étaient effectué, l'écart type obtenu par la simple probabilité à chances égales était comparé à l'écart réel.

Ces résultats mettent en évidence l'existence de quatre bandes situées comme pour N^3Ag aux longueurs d'onde suivantes données en angströms : 1975 ± 25, 2150 ± 25, 2300 ± 35, 2400 ± 40.

Étant donnés les faibles effets obtenus, il n'est pas possible d'avoir des précisions sur les intensités relatives de ces bandes d'émission.

Comme les processus photogéniques de N^3Ag et de N^3Na ont des énergies d'activation différentes que l'on retrouve avec les autres azotures, on peut admettre que toutes les réactions luminescentes accompagnant la décomposition thermique des azotures doivent avoir le même spectre d'émission.

Si l'on examine le spectre électronique de la molécule N^2, on y trouve des états susceptibles de rendre compte des bandes observées expérimentalement.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Sur l'énergie des groupes de protons émis lors de la transmutation du bore par les rayons α.* Note de MM. **Frédéric Joliot** et **Ignace Zlotowski**, présentée par M. Jean Perrin.

La transformation du bore en carbone suivant la réaction

$$ {}^{10}_{5}B + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{13}_{6}C + {}^{1}_{1}H + Q \qquad (1)$$

a été l'objet de plusieurs études (¹). Quatre groupes de protons ont été observés, correspondant d'après Paton (²) aux valeurs de Q suivantes : 3,1; 0,35; —0,78 et —1,86 MeV. La valeur maxima de Q observée : 3,1 MeV est très inférieure à la valeur de Q que l'on peut déduire d'après la réaction (1), des masses exactes des noyaux réagissants. On trouve, en effet, pour Q_{max} : 4,77; 4,3 et 3,95 MeV, suivant que l'on choisit les valeurs des masses déterminées par Aston (³), par Oliphant (⁴) ou par Bainbridge et Jordan (⁵). Ce désaccord faisait penser qu'un groupe de protons, d'énergie plus élevée d'environ 1 MeV, avait échappé aux observateurs ou bien que l'énergie du groupe Q = 3,1 MeV était très notablement sous-estimée. Récemment Maier-Leibnitz et Maurer (⁶) ont observé un groupe de protons correspondant à la valeur de Q = 3,7 MeV se

---

(¹) W. Bothe et H. Fränz, *Zeit. f. Phys.*, 43, 1927, p. 456 et 49, 1928, p. 1; W. Bothe, *Zeit. f. Phys.*, 63, 1930, p. 381; E. Rutherford et J. Chadwick, *Phil. Mag.*, 7ᵉ série, 4, 1927, p. 605; H. Miller, W.-E. Duncanson et A.-N. May, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 30, 1934, p. 549; R.-E. Paton, *Zeit. f. Phys.*, 90, 1934, p. 586.

(²) *Phys. Rev.*, 47, 1935, p. 197.

(³) *Nature*, 137, 1936, p. 357 et 613.

(⁴) *Kernphysik*, Berlin, 1936, p. 62.

(⁵) *Phys. Rev.*, 51, 1937, p. 384-385.

(⁶) *Zeit. f. Phys.*, 107, 1937, p. 509; voir aussi S. Bernardini et D. Bocciarelli, *Ric. Scient.*, 2ᵉ série, 8, 1937, p. 9-10.

rapprochant de la valeur 3,95 MeV déduite des mesures de Bainbridge et Jordan.

Dans toutes ces recherches les énergies cinétiques des protons des divers groupes sont déduites de la mesure des parcours par la méthode d'absorption. Lorsque les intensités des groupes sont faibles, les mesures par cette méthode sont imprécises et, d'autre part, il est difficile de séparer exactement les différents groupes, car les protons de parcours les plus grands se superposent toujours aux protons de parcours plus petits. Nous avons pensé qu'il était préférable pour ces recherches et, d'une façon plus générale, pour déterminer les énergies cinétiques et la nature des particules lourdes (protons, deutons, hélions) émises lors des diverses réactions nucléaires, d'étudier, par la méthode Wilson, l'incurvation des trajectoires par un champ magnétique élevé.

Cette méthode a l'avantage de permettre une séparation aisée des groupes, et de déterminer directement leur énergie en observant un nombre relativement petit de trajectoires. La variation du rayon de courbure en fonction du parcours dans le gaz de la chambre de Wilson permet de déterminer la nature des particules. Le temps d'efficacité par détente étant petit il est, par contre, nécessaire d'employer des sources de rayons α très intenses pour observer un nombre suffisant de trajectoires.

Dans nos expériences, un champ magnétique de 16000 gauss environ, perpendiculaire à l'axe du cylindre de la chambre à détente (diamètre 12^{cm}), est produit par deux grosses bobines sans fer, dans lesquelles circule pendant la détente un courant de 8000 ampères. Ces bobines, dont le principe avait été indiqué par M. A. Cotton au Congrès Solvay en 1930, ont été dessinées et construites au Laboratoire de l'Électro-aimant de l'Académie des Sciences à Bellevue sous la direction de M. B. Tsaï. La source de protons, placée à l'intérieur de la chambre, est constituée par une cible épaisse de bore (de $3^{cm},4$ équivalent d'air) irradié par les rayons α du polonium (84 millicuries). La description bien détaillée de l'installation sera publiée prochainement.

Seuls les protons émis dans des directions faisant un angle compris entre 0 et $\pm 75^\circ$ avec les rayons α incidents étaient observables. 956 trajectoires de protons ont été photographiées et 270 ont pu être mesurées. Les rayons de courbure, à environ 10^{cm} de la petite surface d'émission, sont compris entre $15^{cm},7$ et 27^{cm}, ce qui correspond à des énergies comprises entre 3 et 9 MeV, l'erreur sur la mesure étant de $\pm 0,30$ MeV. La mesure de la variation du rayon de courbure le long d'une même trajectoire est

conforme, aux erreurs de mesures près, à ce que l'on doit attendre de la loi de variation du parcours en fonction de l'énergie. Signalons que nous n'avons observé aucune trajectoire courbée dans le sens d'une charge négative, ce qui indique l'absence de protons négatifs (moins de 1 pour 956 protons positifs) dont l'existence, bien que peu probable, pourrait être envisagée. Tenant compte des conditions géométriques de l'expérience et de l'épaisseur de la cible, la distribution statistique des énergies des protons émis nous conduit aux résultats suivants :

Nous trouvons un groupe de protons correspondant à une valeur de Q égale à 4,3 MeV, cette valeur s'accordant avec celle que l'on déduit des masses calculées par Oliphant. L'énergie maxima des protons observés est de 9 MeV (rayons α incidents de 4,8 MeV), et le groupe correspondant comprenant 15 protons s'étend, en raison des conditions géométriques, jusqu'à 7,5 MeV. Entre 7,5 et 6,5 MeV *nous n'observons aucun proton*, tandis qu'entre 6,5 et 5,5 MeV, il y a un nouveau groupe de 16 protons. Ce groupe correspond à une valeur de Q égale à 2 MeV. Il nous semble, d'après l'allure de la distribution des énergies dans la région ci-dessus indiquée, que le groupe $Q = 3,1$ MeV, précédemment signalé, n'existe pas, et qu'il doit être remplacé par deux groupes : $Q = 4,3$ et $Q = 2,0 \pm 0,3$ MeV d'intensité comparable. La valeur maxima de $Q = 3,7$ MeV, trouvée par Maier-Leibnitz et Maurer, par la méthode d'absorption, serait, d'après nos expériences, trop faible d'environ 0,6 MeV ([7]).

Bothe et Maier-Leibnitz ([8]), n'ayant pu mettre en évidence de coïncidence entre l'émission des protons du groupe $Q = 3,1$ MeV et celle des photons qui auraient dû leur être associés, avaient conclu à l'existence possible d'un état métastable de ${}^{13}_{6}C$ de vie moyenne supérieure à 1/1000e sec. Ces expériences seraient à reprendre si, comme nous le croyons, le groupe $Q = 3,1$ MeV n'existe pas et doit être remplacé par un groupe d'énergie plus faible correspondant à $Q = 2,0 \pm 0,3$ MeV.

([7]) Ajoutons que G. Brubaker et E. Pollard (*Phys. Rev.*, **51**, 1937, p. 1013) ont signalé dans une courte Note l'existence d'un groupe de protons correspondant à $Q = 4,7 \pm 0,5$ MeV; ils attribuent à cette transition une probabilité très faible.

([8]) *Zeit. f. Phys.*, **107**, 1937, p. 513.

PHYSICOCHIMIE. — *Sur le spectre Raman de quelques molybdates en solution aqueuse.* Note de Mlle **Marie Théodoresco**, présentée par M. Charles Fabry.

Au cours d'études sur le spectre Raman de certains complexes, j'ai été amenée à comparer ce spectre à celui des sels minéraux utilisés pour la préparation de ces complexes. Cette comparaison m'a amenée à préciser certaines indications de la littérature concernant le molybdate neutre de sodium et le molybdate ordinaire d'ammonium.

Molybdate neutre de sodium. — Le commerce livre un sel plus ou moins effleuri qu'il suffit de faire recristalliser dans l'eau pure pour avoir le dihydrate $Mo^4ONa^2 + 2H^2O$. Le spectre Raman a déjà été étudié par Nisi [1] et par Damaschun [2]. Ces deux auteurs indiquent respectivement les fréquences 330-845-898 et 314-843-896 cm^{-1}. J'ai moi-même donné déjà une liste des fréquences pour ce sel [3]; des mesures nouvelles permettent de confirmer les trois fréquences 313-839-897 cm^{-1}. L'ensemble des deux dernières raies forme une sorte de doublet immédiatement apparent; la raie 839 est nettement moins forte et plus floue que l'autre. Ce spectre est celui de l'ion MoO^{4--}; il est vraisemblable que la structure de cet ion est semblable à celle de l'ion SO^{4--}; les deux raies 313 et 897 seraient analogues aux deux raies fortes des sulfates, 455-990.

Molybdate d'ammoniaque. — C'est le réactif classique. Par des recristallisations dans l'eau, on obtient des cristaux très purs auxquels on attribue depuis Delafontaine la formule $Mo^7O^{24}(NH^4)^6 + 4H^2O$. Dans le spectre de la solution aqueuse, nous avons relevé 6 raies : 1° Un doublet assez analogue à celui du molybdate neutre, 938 (TF), 892 (F); 2° deux raies d'intensité moyenne : 349-211 cm^{-1} peut-être multiples; 3° deux raies très faibles et larges, 431-293 cm^{-1} peut-être multiples. Le doublet correspondant à ce produit est nettement décalé vers les grandes longueurs d'onde par rapport au précédent; les intensités des deux raies sont beaucoup plus comparables. En admettant la formule rappelée plus haut, ce spectre serait celui de l'ion Mo^7O^{24--}.

Paramolybdate de sodium. — On peut dissoudre à chaud MoO^3 dans une

---

(1) *Jap. J. Phys.*, 5, 1929, p. 119.
(2) *Z. f. physikal. Chem.*, 16 B, 1932, p. 81.
(3) M. Théodoresco, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1649.

solution de carbonate de sodium; avec des précautions, on peut ainsi incorporer $7MoO^3$ dans $3CO^3Na^2$. La cristallisation donne de beaux cristaux de formule $Mo^7O^{24}Na^6 + 21H^2O$. Dans la limite des erreurs, le spectre Raman est identique à celui du sel d'ammonium.

Ces résultats permettent d'affirmer l'existence en solution des sels d'ammonium et de sodium, qui ne sont pas des sels doubles. Rappelons que MM. E. Darmois et J. Périn ([4]) ont établi, par cryoscopie du paramolybdate de Na dans $SO^4Na^2 + 10H^2O$ fondu, que le poids moléculaire de ce sel est bien de l'ordre de grandeur de celui que fait prévoir la formule de Delafontaine.

I. Damaschun ([2]) a donné également des fréquences Raman correspondant à des mélanges de MoO^4Na^2 et de HCl. A un pH donné correspondraient, d'après Brintzinger ([5]), des individualités définies en solution. Outre que ces individualités n'ont pas été isolées, la méthode qui consiste à dissoudre dans l'eau des sels définis nous a semblé préférable.

CHIMIE MINÉRALE. — *Arséniate ammoniaco-magnésien et arséniates alcalino-terreux.* Note de M. **Victor Auger** et Mlle **Nina Ivanoff**, présentée par M. Georges Urbain.

Les arséniates alcalino-terreux du type $AsO^4NH^4Me^{II}nH^2O$ sont pour ainsi dire, inconnus, sauf l'arséniate ammoniaco-magnésien. Il nous est en effet impossible de tenir compte des travaux de Baumann ([1]) et des indications fournies par C. Lefèvre ([2]). Le premier a publié des analyses dont les résultats ne concordent absolument pas avec les formules proposées, et le dernier s'est contenté de chauffer à 100° les précipités obtenus et de calculer la teneur en métal alcalino-terreux, en admettant que le produit sec possède la formule $AsO^4NH^4Me^{II}0,5H^2O$, alors que tous ces sels à cette température, sont en grande partie décomposés avec perte de la presque totalité de l'ammoniac.

Arséniate ammoniaco-magnésien. — Nous avons étudié sa décomposition par la chaleur, comme nous l'avions fait pour le phosphate ([3]). Le sel à

([4]) *Comptes rendus*, **177**, 1923, p. 762.
([5]) H. et W. Brintzinger, *Z. anorg. Chem.*, **196**, 1931, p. 55.

([1]) *Arch. de Pharm.*, 36, 1844, p. 36 et 299.
([2]) *Ann. Ch. Phys.*, **27**, 1892, p. 19.
([3]) V. Auger et N. Ivanoff, *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 434.

$6H^2O$, chauffé à l'air à 55° a perdu au bout de 5 jours 34,1 pour 100 de son poids; il ne contient plus que $0^{mol},225$ de NH^4. A 100°, après 10 heures la perte de poids est de 35,2 pour 100 et le résidu est formé de $AsO^4Mg(NH^4)^{0.39}(H^2O)^{4.7}$ (d'après C. Lefèvre la perte correspondant à $5,5H^2O$, devrait être de 34,5 pour 100).

Nous avons essayé de déshydrater le sel dans une atmosphère d'ammoniac: vers 70°, 5^{mol} d'eau s'échappent et le résidu possède la formule d'un monohydrate; mais il y a eu perte d'une petite quantité d'ammoniac et il ne contient plus que $0^{mol},935$ de NH^4. Au-dessus de cette température, et même en opérant sous pression de gaz ammoniac (1^m de mercure) les pertes en NH^3 deviennent considérables et nous avons dû renoncer à obtenir le sel anhydre.

Monohydrate. — AsO^4MgNH^4, H^2O. Ce sel est obtenu bien cristallisé en chauffant en tube scellé à 125°, pendant quelques jours, l'hydrate à $6H^2O$ en présence d'ammoniaque et d'un peu d'arséniate d'ammonium. On sépare rapidement les cristaux par filtration à chaud, les lave successivement à l'eau ammoniacale très chaude, à l'alcool à 25 pour 100, puis à l'alcool concentré. On les sèche enfin dans le vide sur SO^4H^2. Ce sel cristallise en petites tablettes rectangulaires minces, transparentes. Il s'hydrate très rapidement : un simple lavage à l'eau froide suffit. Nous l'avons soumis à l'action de la chaleur, à l'air ou dans une atmosphère d'ammoniac. Dans ce dernier cas, en opérant à la pression ordinaire, il reste stable jusqu'à 180°; à 190°, il brunit légèrement sans perdre sensiblement de poids; au-dessus, la réduction s'accentue, et à 225° il ne reste plus que 0,266 mol. de NH^4 et 0,4 mol. de H^2O.

Arséniates ammoniaco-alcalino-terreux. — $AsO^4Me^{II}NH^4, 7H^2O$; Me^{II} = Ba Sr Ca. On les obtient tous trois par le même procédé; précipitation d'une solution du nitrate de la base par une solution ammoniacale d'acide arsénique contenant un fort excès d'ammoniaque. *Le sel de baryum* doit être lavé successivement à l'eau très ammoniacale, à l'alcool contenant du gaz ammoniac dissous, et enfin à l'alcool pur et à l'éther. Il se présente sous la forme de prismes aplatis, transparents qui deviennent très rapidement opaques avec perte de NH^3 et H^2O, même dans une atmosphère d'ammoniac. Le *sel de strontium*, beaucoup plus stable, est obtenu en cristaux d'apparence orthorhombique. Exposé à l'air, il perd en 10 jours tout son NH^3 et plus de 5 mol. d'eau; à 100° il perd 6,89 mol. d'eau et 0,88 mol. de NH^3. Le *sel de calcium*, bien étudié par Bloxam ([4]) se présente

([4]) *Chem. News*, 54, 1886, p. 118.

sous forme de cristaux prismatiques épais, transparents. En 10 jours, à la température ordinaire, il perd à l'air, 4,15 pour 100 d'eau et 0,35 pour 100 de NH^3; à 70° après 4 heures, il ne reste plus que 0,4 mol. de NH^3, et enfin après chauffage à 100° à poids constant il a perdu 0,8 mol. de NH^3 et 6,74 mol. d'eau.

Pour souligner l'analogie des phosphates ammoniaco-alcalino-terreux avec les arséniates, nous avons préparé un *sel mixte* $(n AsO^4 m PO^4) CaNH^4, 7H^2O$, qui contenait 41 pour 100 d'arséniate et 59 pour 100 de phosphate.

Arséniates neutres alcalino-terreux. — En précipitant à froid une solution d'arséniate tri-ammonique par un excès de nitrate de baryum ou de strontium, on obtient, sous forme de cristaux prismatiques, les sels $(AsO^4)^2 Ba^3, 18H^2O$ et $(AsO^4)^2 Sr^3, 18H^2O$, mais il nous a été impossible d'obtenir l'hydrate correspondant avec le nitrate de calcium. Même en employant ce sel en énorme excès, on obtient toujours à froid l'arséniate $AsO^4 NH^4 Ca, 7H^2O$.

Par voie indirecte, en laissant en contact pendant une semaine le sel $AsO^4 NaCa 7H^2O$ [obtenu par l'action de $(NO^3)^2 Ca$ en excès sur $AsO^4 Na^3$] avec un excès de $(NO^3)^2 Ca$, en solution 2^{mol} on obtient le sel $(AsO^4)^2 Ca^3$, à 6 ou $7H^2O$; sous forme de très petits cristaux aiguillés réunis en sphérules transparentes. Au cours de ce travail nous avons obtenu le sel $(AsO^4)^2 (NH^4)^4 Sr, 10H^2O$. Ce composé semble résulter d'une association, à molécules égales, de $AsO^4 NH^4 Sr 7H^2O$ et $AsO^4 (NH^4)^3 3H^2O$. Il forme des cristaux transparents qui peuvent atteindre des dimensions de l'ordre du centimètre, obtenus en mélangeant des solutions de nitrate de strontium, de citrate d'ammonium et d'arséniate d'ammonium. Ce produit est très altérable à l'air; à la température ordinaire, il perd, en 2 jours, 34 pour 100 de son poids. Au contact d'eau légèrement ammoniacale, il s'hydrolyse en $AsO^4(NH^4)^2 H$ et $AsO^4 NH^4 Sr, 7H^2O$.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Synthèses dans la série du naphtacène : la naphtacènediaquinone.* Note de MM. **Charles Dufraisse** et **Jean Houpillart**, présentée par M. Marcel Delépine.

Il peut exister en théorie deux quinones mésonaphtacéniques, (I) et (II); nous proposons de les distinguer l'une de l'autre par les préfixes *antio* et *dia*,

qui expriment les dispositions respectivement en vis-à-vis et en oblique des des deux carbonyles.

Seule était connue jusqu'ici la première, l'antioquinone (I); nous allons décrire la seconde, la diaquinone, (II).

Nous avons obtenu cette quinone de la manière la plus simple, en cyclisant, (III), l'acide diphénylfulgénique,

$$C^6H^5 - CH = C(CO^2H) - C(CO^2H) = CH - C^6H^5.$$

Il suffit de chauffer à 70°, pendant une heure, une solution sulfurique à 1,3 pour 100 de cet acide; la liqueur violette, versée sur de la glace pilée, abandonne le composé cherché, avec un rendement de 65 pour 100. Le plus compliqué de l'opération est la purification, à cause de la faible solubilité du produit.

La préparation se fait tout aussi bien, mais pas mieux, à partir du diphénylfulgide, IV.

En raison de sa facile formation par perte d'eau, le fulgide pourrait se produire dans la préparation à partir de l'acide libre, mais sa structure empêche de le considérer comme un intermédiaire essentiel.

La naphtacènediaquinone se présente en cristaux rouge foncé. Elle fond instantanément à 322°, en émettant des vapeurs rouges; chauffée rapidement par petites parcelles, elle est entièrement volatile, sinon elle laisse un résidu charbonneux. Elle est peu soluble à froid dans les solvants organiques : le xylène, par exemple, en retient 2g,5 par litre seulement.

La constitution ressort, en dehors de l'analyse, du mode même de formation. Nous l'avons confirmée en passant, d'une part, à l'hydrocarbure correspondant, le naphtacène, par pyrolyse sur zinc, et, d'autre part, à la dihydroxynaphtacènequinone par fusion alcaline à l'air.

Cette dernière réaction aurait dû théoriquement donner le composé V, différent de l'isomère déjà connu, VI. Pourtant le composé formé est iden-

tique à celui que l'on obtient par divers procédés de synthèse et, en particulier, par fusion alcaline de l'antioquinone, I. En réalité, il est possible que l'isomérie n'existe pas, en dépit des formules, à cause du phénomène de la chélation par lequel l'atome d'hydrogène est rendu commun aux deux oxygènes en péri (liaison hydrogène). La situation se présente comme chez la naphtazarone, VII, et aussi, quoique moins nettement à cause de la symétrie moindre, chez la quinizarone, VIII, corps pour lesquels une isomérie en péri n'a pas pu être décelée.

Une isomérie de cette sorte n'est pas impossible, en principe, car,

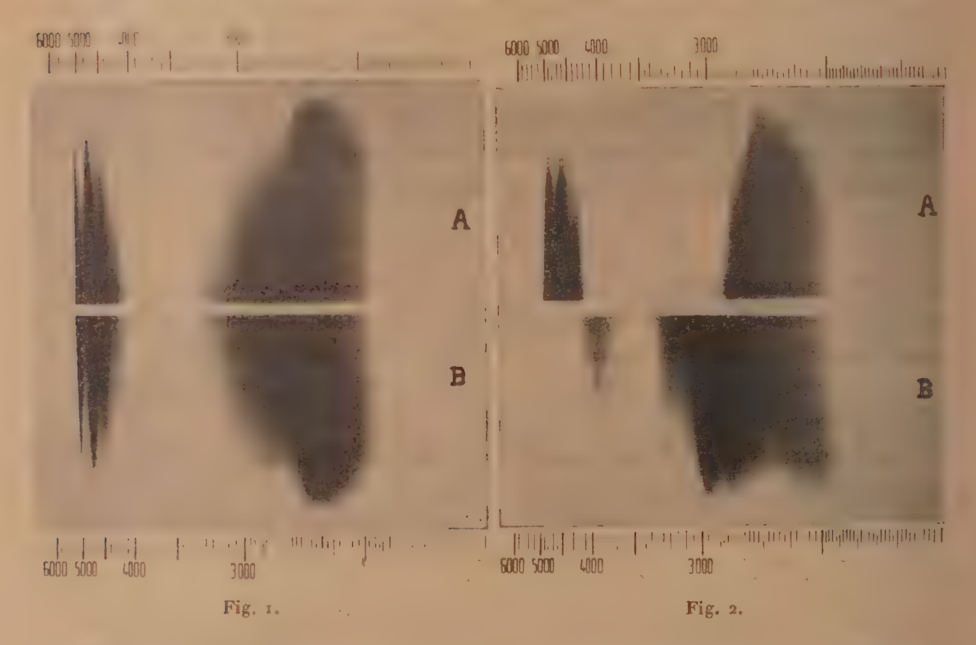


Fig. 1. Fig. 2.

quelle que soit la forme structurale que revête la chélation de l'hydrogène, IX par exemple ou tout autre, la symétrie de la formule ne se trouve probablement pas relevée jusqu'au point où s'effacerait toute différence de disposition de types antio et dia. Mais il faut ajouter que cette isomérie, si elle existe, doit être difficile à caractériser, ne serait-ce qu'en raison de l'extrême mobilité des hydrogènes et de l'instabilité corrélative des structures. Rien de surprenant, par suite, que le produit dihydroxylé provenant de la diaquinone soit le même que celui que donne l'antioquinone.

En tout cas, nos expériences apportent la preuve directe au moins de la

facilité du passage réciproque de l'une à l'autre des formules V et VI, sinon de l'unité de structure des corps censés leur correspondre.

Données spectrographiques (figures de Hartley corrigées). — La figure 1 représente l'identification des dihydroxynaphtacènequinones provenant, A, de l'oxydation de la diaquinone, et, B, de la synthèse connue. On remarquera que la structure du spectre est plus compliquée que ne l'avaient vu les auteurs; en particulier l'absorption dans le visible est constituée, non d'une bande unique, mais d'un groupe de quatre bandes ayant leurs sommets à 5200, 4860, 4560, 4320 Å, pour les solutions chloroformiques.

La figure 2 représente la comparaison entre les deux quinones isomères. Ces spectres, inédits l'un aussi bien que l'autre, portent les bandes caractérisées par les sommets suivants : naphtacène-antioquinone (B) : 4150, 3950, 3200, 2970, 2840 Å; naphtacènediaquinone (A) : 4890, 4570, 4300, 2840, 2725, 2630 Å.

GÉOLOGIE. — *La genèse des phosphorites du Quercy.* Note de M. **Bernard Gèze**, présentée par M. Lucien Cayeux.

La découverte de concrétions de phosphate de chaux par A. Poumarède, près de Cos, commune de Caylus (Tarn-et-Garonne), remonte à 1865. L'exploitation ne commença qu'en 1870, mais prit très vite un grand développement, pour s'éteindre à peu près totalement vers 1900, sauf quelques reprises ultérieures insignifiantes.

On attribua d'abord à ces phosphorites une origine filonienne, puis hydrothermale, toutes deux absolument controuvées aujourd'hui; ensuite on proposa une origine animale, basée sur la découverte dans les gisements d'une riche faune de l'Eocène supérieur et de l'Oligocène; enfin on expliqua l'accumulation phosphatée par un processus de concentration et concrétionnement de phosphates contenus en traces dans les calcaires jurassiques du Quercy, sous l'action d'eaux lagunaires acides, ou plus simplement d'eaux de ruissellement riches en gaz carbonique (Thévenin, *Bull. Serv. Carte géol. Fr.*, 14, n° 95, 1903).

L'hypothèse généralement admise actuellement, telle qu'elle a été exposée par Thévenin (*op. cit.*), est la suivante : L'origine animale du phosphate n'est que partielle. Les eaux chargées d'acide carbonique attaquaient le calcaire jurassique normalement phosphaté et déposaient dans le fond de poches de corrosion le phosphate qu'elles avaient solubilisé.

De récentes observations nous ont conduit à concevoir la genèse des phosphorites d'une façon assez différente de l'hypothèse classique.

En effet, les gisements de phosphorite ne sont pas des fonds de poches de corrosion, mais de véritables gouffres d'érosion et des galeries résultant de l'élargissement de diaclases, preuves d'intenses circulations souterraines pendant l'Eocène supérieur et l'Oligocène.

La profondeur de ces cavités ne dépasse guère 75^m, mais leur développement est parfois considérable et les couloirs souterrains longs de 200^m ne sont pas rares. De toutes façons, les gisements ne sont pas des entonnoirs fermés et, dans le déblaiement de cet ancien réseau hydrographique souterrain, les exploitations n'ont été arrêtées que par des étranglements impraticables à l'homme, les difficultés inhérentes à la trop grande profondeur et l'invasion des eaux souterraines actuelles.

Dans ces cavités les dépôts de phosphorite se rencontrent surtout en placages sur les parois et accessoirement, en masses irrégulières disséminées dans l'argile qui constitue environ les 9/10e du remplissage.

Contrairement à l'opinion de Dieulafait (1), qui estimait que le seul calcaire dissous lors de la formation d'une cavité renfermait plus de phosphate qu'il ne s'y en était déposé ultérieurement, nous avons pu reconnaître que 1^{m^3} de cavité contenait en moyenne, dans la phosphorite et l'argile sidérolithique de remplissage, 85 fois la quantité d'acide phosphorique du mètre cube de calcaire.

Remarquons immédiatement que les deux tiers du phosphate se trouvent dans l'argile, résidu typique de décalcification superficielle auquel s'adjoint une partie d'alluvionnement non négligeable. L'étude chimique (2) de ces sédiments nous a montré, de plus, leur extraordinaire teneur en hydrates d'alumine, qui conduit à les considérer comme des argiles bauxitiques, en même temps que pisolithiques et phosphatées.

Il semble donc vraisemblable d'admettre que, bien avant le creusement des gisements actuels, l'influence du climat tropical de l'Éocène sur une épaisse couche d'argiles superficielles aurait entraîné, par évolution latéritique, la solubilisation et la remise en mouvement de l'alumine, du fer et du phosphate qui y étaient renfermés dans un état peu soluble. Ces composés résultaient de l'altération sur place des calcaires jurassiques phosphatés, pendant la longue période de pénéplanation consécutive à

---

(1) *Ann. de Chim. et Phys.*, 6e série, 5, 1885, p. 204-240.

(2) En collaboration avec M. Garaudeaux.

l'émersion du Quercy méridional (de la fin du Jurassique à la fin de l'Oligocène) et de l'apport par les fleuves éocènes des résidus de décalcification des Causses qui recouvraient alors la presque totalité du Rouergue cristallin.

Dans une deuxième phase seulement, les mouvements tectoniques lutétiens, ayant soulevé et gauchi l'ensemble de la pénéplaine, provoquèrent le creusement des cavités souterraines, probablement vers le niveau de base représenté par la plate-forme littorale des lacs tertiaires du Bas-Quercy, au pied de la falaise bordière du Causse jurassique ([3]).

Les solutions phosphatées entraînées par ruissellement et les argiles phosphatées elles-mêmes, au contact du calcaire pendant les périodes de comblement des gouffres, auraient permis le concrétionnement sur toutes leurs parois du phosphate redevenu difficilement soluble sous forme tricalcique.

Le ralentissement de l'activité des circulations souterraines, dû à la montée du niveau de base stampien, explique l'importance du remplissage, qui alla en s'accroissant jusqu'à la fossilisation complète du Quercy méridional, sous les dépôts aquitaniens auxquels nous sommes redevables de la conservation des phosphorites.

En résumé, les gisements de phosphorite du Quercy sont d'anciennes formes karstiques (gouffres d'érosion et galeries de ruisseaux souterrains) creusées par les eaux éocènes dans une pénéplaine soulevée et gauchie par les mouvements lutétiens. Leur répartition est étroitement liée à la proximité du lac qui constituait leur niveau de base.

La genèse des dépôts de phosphorite s'expliquerait par le concrétionnement, sur les parois calcaires des gouffres, de solutions de phosphate résultant de l'évolution superficielle d'argiles de décalcification et d'alluvionnement, antérieures au creusement des gouffres, et dans lesquelles le phosphore, provenant initialement des résidus du calcaire jurassique, aurait été remis en mouvement, grâce au climat tropical de l'Éocène, par un processus de latéritisation peu poussé.

([3]) Sur 250 gisements, actuellement reconnus entre le Célé (affluent du Lot) et l'Aveyron, dans les départements du Lot, de l'Aveyron, du Tarn-et-Garonne et du Tarn, 200 au moins se situent vers l'Ouest, à peu de distance de la *falaise bordière* du Causse. Les autres, dispersés sur le Causse de Gréalou, la ligne de crête du Causse de Limogne et le Causse de Villeneuve, permettent d'affirmer que ces surfaces calcaires faisaient aussi partie de la pénéplaine éocène.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Emploi des composés rhizogènes pour favoriser la formation des racines et celle des tiges florifères sur les collets de la betterave.* Note de M. **Otto Munerati**, présentée par M. Marin Molliard.

Nous nous sommes tout d'abord proposé de vérifier si le pouvoir que possèdent les collets d'émettre des racines à leur base peut être stimulé par l'emploi de l'un ou de l'autre des composés rhizogènes les plus connus, et si les collets plus fortement enracinés peuvent donner plus facilement naissance à des tiges florifères capables de produire de la graine normale.

Parmi les divers composés expérimentés l'acide β-indol-butyrique montra qu'il possédait, dans le cas qui nous occupe, au plus haut degré le pouvoir en question; quant à la méthode la plus propre à atteindre le résultat elle consiste à immerger dans la solution la base du collet pendant un laps de temps variant de quatre à huit jours selon la température du milieu. Cela donné, il était facile de prévoir comment de ces collets pouvaient prendre naissance des tiges florifères capables d'une production régulière de glomérules; c'est ce que l'observation directe a permis de confirmer. Cependant il reste une condition nécessaire, celle qui consiste à maintenir humide le substratum sur lequel on pratique la culture, de manière à réaliser constamment l'équilibre en eau permettant aux feuilles, qui se forment au fur et à mesure sur les tiges, d'élaborer les principes suffisants pour permettre aux plantes de parvenir régulièrement à la fin de leur cycle. Les glomérules formés sur ces tiges possèdent le même pouvoir germinatif que celui des glomérules provenant d'individus obtenus en culture normale.

Une observation mérite cependant d'être signalée : un grand nombre de collets, même soumis à une stimulation préventive par l'emploi de composés rhizogènes, se refusent à émettre des racines; s'agit-il d'une tendance liée à un ou plusieurs facteurs héréditaires? L'expérience seule pourra démontrer si cette hypothèse est fondée.



PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur la sensibilité photo-géotropique du sporogone des Hépatiques*. Note de M. **Robert Douin**, présentée par M. Marin Molliard.

Les réactions de croissance du sporogone de quelques Hépatiques vis-à-vis de la lumière et de la pesanteur ont été l'objet des recherches de Nemec [1]. Suivant cet auteur, les sporogones du *Pellia calycina* sont si faiblement géotropiques que, placés à l'obscurité dans une position horizontale, quelques-uns seulement d'entre eux sont capables d'un redressement complet; par contre ces sporogones sont d'une très grande sensibilité à la lumière. Nous avons repris la question en expérimentant, soit à l'obscurité totale, soit sous divers éclairements, et nos expériences ont été faites à la température sensiblement constante de la chambre noire.

Expériences à l'obscurité. — Deux séries d'expériences ont été réalisées : dans l'une les plantes étaient soumises à l'action de la pesanteur, dans l'autre elles étaient au contraire soustraites à cette action.

1° Des thalles porteurs de sporogones à pédicelles de différentes longueurs étaient disposés de telle sorte que les sporogones soient ou bien en position verticale renversée (thalles A), ou bien en position horizontale (thalles B). Sur les thalles A comme sur les thalles B, les pédicelles subirent une courbure ramenant les capsules à leur position normale primitive.

2° Les thalles B étaient maintenus à l'obscurité et immédiatement placés dans leur position naturelle sur un clinostat en marche. Par suite de l'action de la pesanteur au cours de l'expérience précédente, les pédicelles des sporogones étaient courbés à 90° et leur partie supérieure munie de la capsule était parallèle à la surface des thalles. Après 30 heures de rotation, les pédicelles ne présentaient aucun changement de direction alors qu'ils avaient subi une élongation générale. Contrairement à l'opinion de Nemec, les sporogones du *Pellia calycina* sont donc tous franchement sensibles à l'action de la pesanteur.

Expériences sous un éclairement unilatéral. — Nous avons dans ces expériences cherché à comparer les sensibilités à la lumière et à la pesanteur. Les thalles, placés soit dans une position renversée (les sporogones pendent

---

(1) *Die Wachstumrichtungen einiger Lebermoose, Flora*, 1906, p. 409-450.

verticalement), soit dans une position verticale (les sporogones sont horizontaux), étaient éclairés par en dessous.

1° *Sporogones pendants.* — Soumis à des éclairements de 15 lux, 7,5 lux, 4 lux, 1 lux, les pédicelles ne présentaient aucune courbure, mais placés ensuite à l'obscurité totale, ils étaient le siège d'une courbure géotropique négative. Par contre, sous un éclairement de 0,5 lux, les pédicelles montraient une courbure géotropique négative.



Courbure géotropique négative des pédicelles du *Pellia calycina.*

2° *Sporogones horizontaux (expériences de contrôle).* — Sous 1 lux, le pédicelles se courbaient positivement de 90° (courbure phototropique). Sous 0,5 lux, ils étaient négativement géotropiques.

Le seuil est donc compris entre 0,5 lux et 1 lux, ce qui précise l'extrême sensibilité à la lumière déjà signalée par Nemec des sporogones de ce *Pellia*. On conçoit, par suite de l'existence de ce seuil très bas, que dans la nature leur orientation soit déterminée par la lumière et qu'ils puissent parfois croître dans une direction non parallèle à celle de la pesanteur.

Mécanisme de la courbure. — Nemec a observé le premier que les sporogones décapités réagissent encore. La perception de l'excitation et la possibilité de réaction ne sont donc pas liées à la présence de la capsule et ceci suffit à exclure la possibilité d'un centre producteur d'hormone, opinion formulée par du Buy et Nuernbergk et du Buy (*Rec. des Tr. Bot. Néerl.*, 27, 1930) à la suite de leurs expériences sur le *Pellia epiphylla*. Ces courbures sont liées à la croissance comme toutes les courbures tropistiques. Or, le développement du pédicelle se fait en deux stades successifs : un stade de multiplication cellulaire pendant lequel se forment toutes les cellules du

pédicelle, un stade d'élongation cellulaire qui, dans le *Pellia* étudié, affecte progressivement les cellules depuis la base jusqu'au sommet (croissance basifuge) et détermine l'allongement. C'est à partir de ce deuxième stade que peuvent prendre naissance les courbures par élongation plus considérable des cellules de l'une des faces et la possibilité de mouvement cesse à mesure que les cellules, celles de la base les premières, atteignent leur longueur maxima.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Vitamine C et chlorophylle.* Note de M. **André Mirimanoff**, présentée par M. Alexandre Guilliermond.

Le dosage de l'acide ascorbique a fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Récemment Paul Meunier (¹) a publié une étude critique des différents procédés d'analyse. Les méthodes utilisant un indophénol manquant de précision et de spécificité, ce savant a proposé un procédé nouveau fondé sur l'étude cinétique de la décoloration de ce réactif au moyen de son électrophotomètre. Dans des conditions de pH déterminées, il est possible, avec une grande précision, de doser l'acide ascorbique en présence de corps réagissant eux-mêmes sur l'indophénol.

D'autre part, à un pH égal ou inférieur à 2,5, l'indophénol se décolore assez rapidement, même en l'absence de tout corps réducteur. La méthode cinétique permet d'éviter cette cause d'erreur, importante avec les faibles teneurs en vitamine C.

Pouvant disposer de l'électrophotomètre de Meunier, il nous a paru intéressant de procéder à des dosages d'acide ascorbique chez divers végétaux, en particulier de comparer, à cet égard, les tissus chlorophylliens et achlorophylliens.

Cinq grammes de tissus végétaux sont triturés avec cinquante centimètres cubes de la solution suivante :

Acide trichloracétique	5g
Acide métaphosphorique	2g
Eau distillée	100g

Un centimètre cube (ou sa fraction) de l'extrait filtré est dilué à dix centimètres cubes avec une solution tampon de pH 3,8. Une étude critique des

(¹) *Annales des Fermentations*, 3, 1937, p. 157.

conditions d'extraction a montré que cette technique assure, sinon l'obtention de la totalité de la vitamine C, du moins la garantie de résultats reproductibles. L'emploi de HPO^3 protège l'acide ascorbique contre son oxydation à l'air. Nous avons constaté, par ailleurs, que le dosage n'est pas influencé par la présence de pigments oxyflavoniques.

Dans tous les cas observés, sauf un (induvies sèches de l'Églantier), tout se passe, au pH 3,8, comme si l'acide ascorbique était le seul réducteur de l'indophénol, présent dans l'extrait végétal. Aucune correction graphique n'est donc généralement nécessaire.

	Acide ascorbique pour 100g de plante fraîche. mg		Acide ascorbique pour 100g de plante fraîche. mg
Laitue, feuilles vertes	11,2	Tulipe, bulbe	6,0
» feuilles blanches	16,0	» tige étiolée	2,7
Poireau, feuilles vertes	67,0	» feuille verte	16,5
» feuilles blanches (gaine)	46,0	» fleur (sans chlor.)	50,0
Chou de Bruxelles, feuilles vertes	67,0	Chou-fleur, feuille verte	49,2
» feuilles étiolées	69,0	» réceptacle blanc	30,0
Iris, feuilles vertes	178,0	» feuille base étiolée	12,2
» feuilles étiolées	201,0	Narcisse blanc, fleurs	157,0
Narcisse jaune, fleurs (sans chlor.)	57,6	» tige verte	56,0
» tige verte	46,5	Haricot.	
Scarolle, feuilles vertes	10,9	*a*. germé à la lumière: feuilles vertes	116,0
» feuillles étiolées	11,2	*a*. germé à la lumière: tiges vertes	12,1
Jonquille, fleur (sans chlor.)	19,4	*b*. germé à l'obscurité: feuilles étiolées	84,0
» tige verte	8,0	*b*. germé à l'obscurité: tiges étiolées	13,5
» tige étiolée (base)	0,5		

Ces résultats montrent que la richesse en acide ascorbique est surtout fonction de la structure anatomique. Certains organes (bulbes, racines, tiges) sont pauvres en facteur C, d'autres semblent l'accumuler (feuilles, fleurs), ceci indépendamment de leur richesse en chlorophylle. Les pétioles sont très pauvres, ce qui peut expliquer la faible teneur de certains éléments étiolés (base des feuilles de Monocotylédones, réceptacle charnu du Chou-fleur, feuilles développées à l'obscurité etc.).

Giroud (²) qui, le premier, a eu le mérite d'établir une comparaison entre éléments semblables morphologiquement, a étudié le cas des feuilles panachées et des chimères. Force nous est de constater que le plus souvent

(²) MM. Giroud, Ratsimamanga et Leblond, *Bull. Soc. Biol.*, 17, 1935, p. 232.

les différences portent sur un pourcentage négligeable en pratique, surtout avec la méthode de dosage habituelle. Contrairement à l'opinion de ce savant, nous ne pouvons établir aucun lien direct entre la chlorophylle et la vitamine C.

D'autres exemples le prouvent nettement : feuilles vertes et étiolées de la Laitue et de la Scarolle; fleurs de la Tulipe et du Narcisse dépourvues de chlorophylle, et plus riches que la tige et les feuilles.

Chez l'Iris, le rhizome a une teneur voisine de 30^{mg}, la partie étiolée des feuilles, proche de rhizome (à structure quelque peu pétiolée) en contient environ 175^{mg}, la partie verte acuminale, 200^{mg}. Il existe donc entre ces organes de véritables seuils, qu'on retrouve également chez la Tulipe, le Narcisse, la Jonquille etc. Chez une espèce donnée, les valeurs peuvent varier considérablement en valeur absolue d'un individu à un autre; les valeurs relatives demeurent constantes.

Il est vraisemblable que la photosynthèse a une influence sur l'élaboration de la vitamine C (expériences de germination et d'étiolement) [3].

Nos résultats, sans infirmer cette hypothèse, prouvent cependant que la valeur antiscorbutique d'un végétal ne dépend pas de la présence de la chlorophylle.

EMBRYOGÉNIE VÉGÉTALE. — *Embryogénie des Portulacacées. Développement de l'embryon chez le* Portulaca oleracea *L.* Note de M. **René Souèges**, présentée par M. Pierre-Augustin Dangeard.

Par ses caractères embryogéniques, le *Portulaca oleracea* vient se ranger à côté du *Samolus Valerandi* L. Les lois qui président au développement de l'embryon, chez les deux espèces, sont, dans leurs traits essentiels, absolument identiques [1].

Au proembryon bicellulaire succède une tétrade comportant quatre éléments superposés (*fig.* 1 à 3). Les deux éléments inférieurs, issus de la cellule basale, *cb*, engendrent la portion proximale, la plus développée, du suspenseur; comme ils n'ont pas de rôle constructeur à jouer, il n'est pas tenu compte de ces deux éléments dans

---

(3) Mme Randoin, MM. Giroud et Ratsimamanga, *C. R. Soc. Biol.*, **126**, 1937, p. 1068.

(1) R. Souèges, *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 145; *Titres et Travaux* (2e Notice), 1937, p. 29.

l'établissement des lois de l'embryogenèse. Les deux cellules supérieures, *cc* et *cd*, produisent une tétrade en T (*fig.* 6), puis un groupe octocellulaire présentant quatre étages : *q*, *m*, *n* et *n'* (*fig.* 7).

L'étage *q* est constitué de quatre quadrants, qui, par divisions transversales, donnent

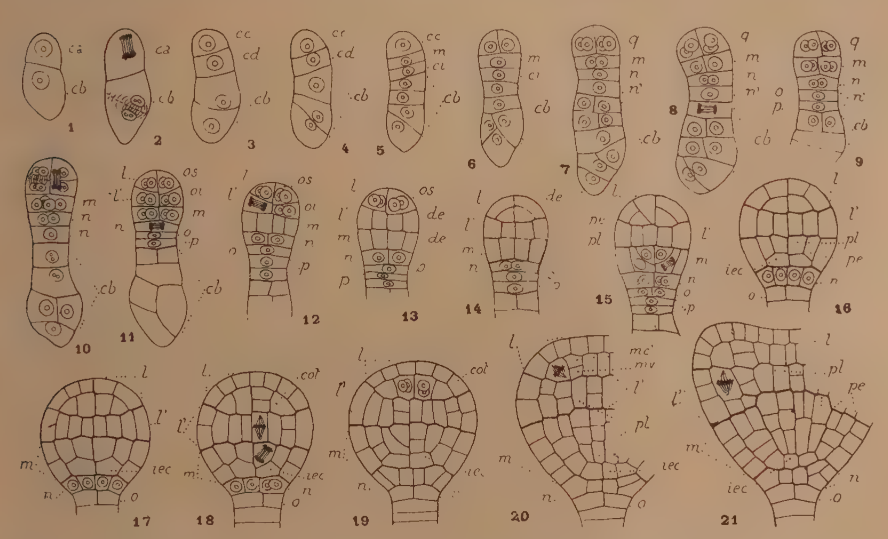


Fig. 1 à 21. — *Portulaca oleracea* L. — Les principaux termes du développement de l'embryon *ca* et *cb*, cellule apicale et cellule basale du proembryon bicellulaire; *cc* et *cd*, cellules fille de *ca*; *m*, cellule fille supérieure de *cd* ou portion inférieure de l'hypocotyle; *ci*, cellule fille inférieure de *cd*; *n*, cellule fille supérieure de *ci*, génératrice de la coiffe; *n'*, cellule fille inférieure de *ci*; *o* et *p*, cellules filles superposées de *n'*; *q*, quadrants, issus de *cc*; *l* ou *os*, octants supérieurs ou partie cotylée; *l'* ou *oi*, octants inférieurs ou portion supérieure de l'hypocotyle; *de*, dermatogène; *pe*, périblème; *pl*, plérome; *cot*, cellule mère du cotylédon; *mc'*, cellule mère du méristème cortical interne, et *mv*, du méristème vasculaire du cotylédon; *iec*, initiales de l'écorce de la racine. — G. = 300.

quatre octants supérieurs, *os*, et quatre octants inférieurs, *oi* (*fig.* 10, 11). Les premiers engendrent la partie cotylée *l*; les seconds la portion supérieure de l'hypocotyle, correspondant à la tige hypocotylée *l'*. L'étage *m* produit la portion inférieure de l'hypocotyle représentant le rudiment de la racine; les processus de différenciation des initiales de l'écorce, *iec*, dans cet étage, sont identiques à ceux qui ont été observés, tout d'abord, chez les *Hyoscyamus*, et retrouvés chez le *Samolus Valerandi*.

L'étage *n* donne naissance à la portion médiane de la coiffe; les quatre cellules circumaxiales qui se constituent, dans cet étage (*fig.* 8 à 15), prennent généralement des cloisons verticales (*fig.* 16 à 18), avant de se segmenter transversalement (*fig.* 19 à 21). L'étage *n'* se partage en deux cellules superposées *o* et *p*; *o* entre dans la construction de la portion culminante de la coiffe; *p* donne quelques éléments du suspenseur.

Les différences que l'on peut relever entre le *Portulaca oleracea* et le

Samolus Valerandi sont tout à fait secondaires; elles témoigneraient du caractère primitif de l'embryon de la première de ces espèces. Elles résident : 1° dans la formation, chez le *Portulaca*, d'un proembryon qui se composerait normalement de huit cellules après trois périodes de division à partir de l'œuf; 2° dans la construction d'un suspenseur massif, assez gros, dont le comportement et la résorption tardive seraient en rapport avec le mode de développement de l'albumen; 3° dans les détails des processus de génération de la coiffe aux dépens des étages *n* et *o*.

Les observations qui viennent d'être résumées, tout en confirmant pleinement les résultats de mes précédentes recherches sur le *Samolus Valerandi*, démontrent, d'une manière évidente, que l'embryon du *Portulaca* se sépare de celui des Caryophyllacées et s'apparente à celui des Primulacées. D'autres caractères, tirés du mode de placentation, de la structure de l'ovule, de la nature pyxidaire du fruit, des propriétés séro-diagnostiques ont déjà servi de termes de rapprochement entre représentants des Centrospermales et des Primulales ([2]).

CYTOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *Réalisation d'un milieu de culture dépourvu de matières animales et permettant la maturation des ovules de mammifères.* Note de M. **René Moricard**, M[lle] **Simone Gothié** et M. **Basile Tsatsaris**, présentée par M. Antonin Gosset.

Nous avons décrit une technique ([1]) qui permet d'obtenir, à partir des ovaires d'une Souris impubère, de 30 à 100 ovocytes qui sont au même stade et qui possèdent un noyau avec un nucléole. On répartit ces ovocytes par groupe d'une dizaine dans une goutte de sérum de Souris et en 9 à 12 heures il y a émission du premier globule polaire. On a ainsi un test morphologique de vie des ovules. En moyenne sur 111 ovocytes cultivés, on a eu 55 pour 100 de globules polaires formés. Il est à remarquer que, dans certaines gouttes de sérum, tous les ovocytes ont expulsé leur premier globule polaire, alors que dans d'autres il n'y a pas d'expulsion. Dans les sérums hétérogènes la maturation est exceptionnelle. Nous nous sommes

---

([2]) Cf. R. Wettstein, *Handb. der system. Botanik*, 1935, II, p. 864.

([1]) R. Moricard et P. de Fonbrune, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 999; *Archiv. d'Anat. Microsc.*, 33, 1937, p. 113.

proposé de réaliser un milieu artificiel de culture totalement dépourvu de matières animales.

1° *Solutions hydrominérales glycosées.* — Les ovocytes mis dans le liquide de Ringer Locke ou de Tyrode dégénèrent très rapidement, le cytoplasme se rétracte, s'assombrit et prend une teinte jaunâtre.

Sur 94 ovocytes mis dans du liquide de Ringer Locke ainsi que sur 165 ovocytes mis dans du liquide de Tyrode, il n'y a eu aucune expulsion de globule polaire. Ces résultats nous ont amenés à modifier les propriétés physiques de ces liquides. Une observation nous a partiellement guidés : par des micromanipulations d'ovules en maturation normale dans le liquide folliculaire, nous avons constaté que les cellules péri-ovocytaires et leurs sécrétions, forment autour de l'ovocyte une gangue extrêmement visqueuse. Nous avons été amenés à modifier la viscosité, la tension superficielle et l'équilibre colloïdal des solutions de Ringer et de Tyrode.

2° *Liquides gélosés ou gélatinés.* — L'adjonction de gélose à des concentrations variant de 1g,5 à 5g pour 1000 au liquide de Ringer Locke ne rend pas le milieu beaucoup plus favorable. Sur 165 ovocytes cultivés, il y a eu seulement expulsion de 2 globules polaires; sur 162 ovocytes cultivés en Ringer Locke gélatiné il n'y a pas eu de formation de globule polaire.

3° *Liquides gommés.* — Nous avons réalisé 12 solutions différant par leur concentration en gomme arabique (de 16,6 à 70 pour 1000) ou en bicarbonate de soude ou en phosphates de soude. Nous y avons cultivé plus de 1500 ovules. Dans tous ces liquides, nous avons observé la formation de globules polaires. Un milieu s'est montré plus favorable. Nous le dénommons liquide gommé G_6. Sa composition est la suivante : NaCl 4g,5, KCl 0g,2, $CaCl^2$ 0g,10, Glucose 0g,5, CO^3HNa 0g,6, Gomme arabique 47g, Eau q. s. pour 1000$^{cm^3}$.

Le pH est de 8. La *viscosité* mesurée au tube capillaire est doublée par rapport au liquide de Ringer Locke. La *tension superficielle dynamique* mesurée à la pipette de Duclaux est relativement peu modifiée, mais la méthode stalagmométrique, dans les conditions habituelles, ne saurait donner une valeur exacte de la tension superficielle statique qui est en jeu entre le liquide et les ovocytes.

Dans tous les liquides gommés que nous avons utilisés, les ovules conservent un cytoplasme clair, finement granuleux et transparent, les cellules péri-ovocytaires s'étalent et prennent un aspect de fibroblastes. Au bout de 4 à 8 heures, on assiste généralement à l'apparition de la métaphase de la première mitose de maturation, ce qui peut être suivi de

l'expulsion du premier globule polaire (environ 12 heures après la mise en culture).

Sur 290 ovocytes cultivés dans le liquide G_6, 95 ont émis leur premier globule polaire, soit environ 40 pour 100 de maturation, mais, d'une goutte de culture à l'autre, il y a de très grandes variations dans la proportion des globules polaires formés. Ces variations s'observent avec des ovules provenant d'une même souris, cultivés dans la même chambre à huile, sous la même lamelle, et par suite soumis aux mêmes conditions de température ou d'éclairement; dans une même série de 74 ovocytes répartis dans 12 gouttes, on a

$$\frac{\text{0 globules polaires}}{\text{10 ovocytes}},\quad \frac{2}{7},\quad \frac{0}{9},\quad \frac{6}{7},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{0}{4},\quad \frac{3}{3},\quad \frac{8}{10},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{0}{3},\quad \frac{0}{2},\quad \frac{7}{11}.$$

Ces différences dans la proportion de formation des globules polaires sont plus marquées que celles observées dans le sérum de Souris.

Au cours de la culture, il y a une acidification du milieu. En 24 heures le pH peut passer de 8 à 4,6 et cependant, il peut y avoir expulsion du premier globule polaire. Cette baisse du pH est beaucoup plus intense que celle observée dans le sérum de Souris. L'acidité naturelle des gommes arabiques nous a conduits à augmenter la concentration de la solution en bicarbonate de soude. On ne peut pas excéder $7^g,5$ pour 1000; au delà de cette concentration, le dégagement de CO^2 inhérent à l'acidification du milieu, peut entraîner une asphyxie des cellules. L'adjonction de phosphates di et trisodique au milieu a pour effet de hâter le déclanchement de la mitose et l'émission du premier globule polaire. On peut l'observer dès 9 heures après la mise en culture.

En résumé, dans le liquide gommé G_6, nous avons obtenu la formation du premier globule polaire dans des ovocytes de souris avec des résultats qui sont presque aussi favorables que ceux obtenus dans le sérum de Souris. Nos résultats sont plus favorables que ceux obtenus dans des sérums hétérogènes. Notre nouveau liquide gommé permet d'aborder d'une façon précise l'analyse des facteurs physicochimiques qui conditionnent le développement de l'œuf des Mammifères.

ZOOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *Rôle possible du ganglion frontal dans la métamorphose de* Bombyx mori *L.* Note de M. **Jean-Jacques Bounhiol**, présentée par M. Maurice Caullery.

Ainsi que nous l'avons indiqué ([1]), écérébrés moins de 9 jours après leur dernière mue, les vers à soie ne se nymphosent pas; la nymphose se produit, au contraire, chez quelques-uns des opérés au dixième jour, chez la majorité de ceux opérés plus tardivement.

De résultats analogues, obtenus chez *Lymantria dispar*, et du fait que la métamorphose n'est pas empêchée quand, à la même époque, il coupe la corde nerveuse, ou lèse la tête comme dans une écérébration (mais en laissant le cerveau intact), Kopèc (1923) a déduit que le cerveau des insectes joue dans la métamorphose un rôle spécifique et d'ordre sécrétoire.

A l'égard du *système nerveux intestinal* et du système *sympathique*, susceptibles de dériver les influx cérébraux après coupure de la corde nerveuse, Kopèc s'exprime ainsi : « vu la taille extraordinairement petite du système intestinal il était impossible de l'étudier chirurgicalement en plus grand détail ». D'autre part, cet auteur ne définit pas clairement les *opérations de contrôle* : les cornes antérieures des cérébroïdes étaient-elles coupées et les cérébroïdes, nerveusement isolés, déplaçables dans le crâne? ou bien crâne et muscles étaient-ils simplement coupés?

A cause de ces lacunes et de ces imprécisions, on peut se demander si la suppression de la nymphose par écérébration n'est pas en rapport avec la suppression de l'innervation, consécutive à cette écérébration, du ganglion frontal ou d'autres organes céphaliques.

Pour ces raisons, nous avons tenté l'ablation du ganglion frontal. Ce ganglion, qui se trouve à 2/10e de millimètre en avant du cerveau, sur la face dorsale de l'œsophage buccal, a environ 1/10e de millimètre de diamètre. L'opération a été réussie chez 40 vers. Treize se sont nymphosés : ils avaient tous été opérés âgés de plus de sept jours après leur dernière mue. Les sept papillons finalement obtenus proviennent de vers opérés passé le onzième jour. Des vers des mêmes pontes, ayant passé leur dernière mue au même moment que ceux frontalectomisés, furent écérébrés aux

([1]) *Comptes rendus*, **203**, 1936, p. 1182.

mêmes âges que ces derniers : or aucune nymphe ne fut obtenue à partir de vers écérébrés avant le neuvième jour révolu.

Ainsi le ganglion frontal peut être enlevé 48 heures environ plus tôt que le cerveau, sans empêcher la nymphose.

	Avant le 7ième jour.		Du 7ième jour au 9ième jour.		Passé le 10ième jour.	
Cerveau..........	+	—	+	—	+	—
G. Frontal........	—	+	—	+	—	+
Résultat..........	o	o	Ny	o	Ny	Ny

Le tableau ci-dessus montre que l'action cérébrale nymphosante supposée peut s'effectuer en l'absence du ganglion frontal, à partir du 7ième jour, mais qu'avant cet âge, le ganglion frontal est nécessaire.

Peut-être l'action cérébrale n'est-elle donc que secondaire et déclenchée par un stimulus issu, peu avant le 7ième jour, du ganglion frontal qui, par le nerf récurrent, contrôle une grande partie de l'intestin moyen.

Chez *Lymantria dispar*, nous n'avons personnellement jamais obtenu de nymphe à partir de chenilles ♀ écérébrées avant le 10e jour, tandis que nous en avons obtenue à partir de chenilles frontalectromisées le 6e. Mais, nos expériences, moins nombreuses que chez le ver à soie, ne nous permettent pas une conclusion plus confirmative, d'autant que Kopèc aurait obtenu des nymphes à partir de chenilles écérébrées le 7e jour.

D'autre part, peut-être ne faut-il pas sous-estimer le rôle du jeûne, consécutif aux écérébrations comme, du reste, au frontalectomies. Le simple jeûne empêche la nymphose quand il débute avant le 6e-7e jour, chez le ver à soie comme chez *Lymantria*, bien que la durée du dernier âge de ces espèces soit différente : respectivement 18 et 16 jours. Une partie des phénomènes observés après l'écérébration et surtout après l'ablation du ganglion frontal est donc probablement due à l'inanition.

En attendant que l'on puisse trouver une espèce opérable, chez laquelle les *périodes critiques* du jeûne, de la frontalectomie et de la cérébrectomie seraient plus décalées dans le temps, nos expériences apportent, en ce qui concerne le ganglion frontal et son rôle, une contribution expérimentale et permettent de se faire une idée nouvelle de l'influence cérébrale dans la métamorphose des Lépidoptères. L'une et l'autre sont compatibles avec les acquisitions récentes relatives à l'action des corpora allata.

ZOOLOGIE. — *Remarques sur le cycle sexuel de l'Oursin*, Strongylocentrotus lividus, *dans la région de Roscoff*. Note de Mlle **Yvette Neefs**, présentée par M. Charles Pérez.

On sait que les Oursins passent par des états de maturité génitale, séparés par des périodes de dégénérescence des glandes reproductrices. La durée du cycle sexuel est considérée comme à peu près fixe. L'hiver serait une période de repos génital relatif pour le *Strongylocentrotus lividus* de la Manche, les glandes ne recommençant à fonctionner qu'au printemps.

J'ai suivi, au cours des années 1936 et 1937, l'évolution des glandes génitales des Oursins de la région de Roscoff, pendant les différentes saisons, ainsi que la répartition annuelle du nombre des femelles et des mâles. Les pêches ont été effectuées, soit sur les côtes rocheuses et battues de Primel, à une profondeur de 30m environ, soit au voisinage de l'écueil du Béclem, au même niveau, mais sur les fonds de la baie de Morlaix.

L'étude de la proportion des sexes a été faite, en dénombrant statistiquement les mâles et les femelles recueillis à des époques déterminées. A cette occasion, j'ai pu constater qu'à Roscoff, les Oursins présentent des cycles sexuels complets au cours de toute l'année. On pêche, pendant les mois de décembre et de janvier, des mâles et des femelles mûrs. Sans atteindre le développement qu'elles présenteront en juin et juillet, les glandes continuent donc leur évolution pendant les mois d'hiver.

J'ai inscrit, sur le tableau suivant, les proportions de femelles observées au cours des années dernières et le nombre *n* d'individus examinés pour chaque lot.

	Pêches au Béclem.						Pêches à Primel.			
	1936.		1937.		1938.		1936.		1937.	
	n.	%.	*n*.	%.	*n*.	%.	*n*.	%.	*n*.	%.
Janvier	–	–	49	26,5	–	–	–	–	51	1
Février	–	–	–	–	117	44	–	–	–	–
Mars	–	–	–	–	–	–	–	–	48	45,5
Avril	–	–	105	47	–	–	–	–	99	57
Mai	–	–	59	40	–	–	–	–	54	50
Juin	–	–	55	41	–	–	–	–	60	53
Juillet	–	–	597	46	–	–	–	–	–	–
Août	–	–	303	46	–	–	–	–	72	51
Septembre	74	70	661	62	–	–	60	58	443	56
Octobre	45	62	–	–	–	–	47	62	–	–
Novembre	51	53	119	50,5	–	–	43	51	–	–
Décembre	46	41	–	–	–	–	66	45	–	–

Les résultats, établis sur un nombre d'individus souvent faible, n'ont pas toujours une valeur significative. Certains ne sont donnés qu'à titre d'indication provisoire. Mais, il est indéniable que le nombre des femelles est supérieur au nombre des mâles pendant les mois de septembre à novembre. Les femelles deviennent plus rares à la fin de l'année et restent moins nombreuses que les mâles, pendant la période de pleine activité génitale (avril à septembre).

Il serait imprudent de généraliser les résultats qui précèdent. On peut cependant tenir pour acquis que la proportion des sexes présente des variations d'assez grande amplitude, au cours de l'année. On pourrait penser que des migrations se produisent périodiquement en rapport avec le sexe et la maturité génitale des Oursins.

Mais, dans ce cas, la proportion des individus de chaque sexe devrait varier suivant la profondeur à laquelle on les récolte.

Or j'ai examiné deux lots importants d'Oursins, ramassés à marée basse, sous les pierres de la grève du Béclem, en août et en septembre. Ils m'ont donné les résultats suivants :

Août...	300	femelles 45 %	Septembre...	488	femelles 63 %

Ces pourcentages sont comparables à ceux obtenus sur les lots pêchés au faubert, dans la même station, aux époques correspondantes et inscrits sur le tableau qui précède.

J'ai vérifié qu'un phénomène analogue se produit chez l'Oursin fouisseur *Echinocardium cordatum* récolté dans le sable de la plage de Saint-Efflam, à deux dates très éloignées de l'année 1937 :

Juillet..	178	femelles 58 %	Septembre...	181	femelles 33 %

Que ces fluctuations soient en rapport ou non avec les phénomènes d'hermaphrodisme que j'ai signalés précédemment [1], il résulte de cette étude que les variations de l'état sexuel des Oursins se produisent sous des influences plus complexes qu'on ne le suppose en général.

Pour étudier la durée du cycle sexuel lui-même, j'ai conservé, dans les aquariums du laboratoire de Roscoff, des Oursins de sexe connu, nourris d'algues vertes et sacrifiés à intervalles définis. La plupart des mâles et des femelles mûrs au milieu du mois de juillet renfermaient encore des produits génitaux à la fin d'août, sans qu'il y ait eu intercalation d'une

---

(1) *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 900.

période de dégénérescence complète. Le cycle peut donc être beaucoup plus long qu'on ne l'admet généralement.

Les conditions anormales de la vie en aquarium ne peuvent suffire à expliquer cette durée considérable des cycles. J'ai eu, en effet, des résultats identiques avec plusieurs centaines d'Oursins femelles, conservés pendant trois mois, en vivier ouvert, au large du laboratoire.

CHIMIE PHYSIOLOGIQUE. — *Sur l'état du glycogène dans le foie.* Note de MM. **Eugène Aubel**, **Wastroslaw S. Reich** et **F. Michel Lang**, présentée par M. Maurice Javillier.

On admet à la suite de travaux récents que, dans le foie ou les muscles, le glycogène est, au moins pour une part, chimiquement lié à des protéines [(1) et (2)].

La combinaison appelée par Willstätter et Rohdewald (1) Symplex, a été isolée par ces auteurs en faisant agir des acides faibles sur les tissus, d'une part pour éliminer l'action diastasique, et d'autre part pour fractionner le mélange des protéines tissulaires.

La composition du Symplex, évaluée par le rapport N/glycogène, varierait dans de larges limites.

Nous avons essayé d'isoler le Symplex en employant des méthodes plus douces que celles des auteurs précédents, afin d'étudier la combinaison dans un état se rapprochant autant que possible de l'état initial.

Pour effectuer le fractionnement en évitant l'action des acides, nous avons opéré de la manière suivante :

Deux foies (ensemble 400^g) de chiens, nourris préalablement pendant 8 jours avec du sucre et des pommes de terre, ont été rapidement extraits de l'animal anesthésié au chloralose et saigné à blanc. Ils ont été mis immédiatement dans la neige carbonique; les morceaux encore congelés ont été pulvérisés et jetés dans une solution de 1^g de KCN dans un litre d'eau à 0°; le mélange agité pendant 2 heures à la température ambiante a été centrifugé. Le culot a été de nouveau extrait avec une solution de 1^g de KCN dans un litre d'eau avec agitation pendant 1 heure, puis l'extraction a été répétée encore une fois.

---

(1) *Ztsch. f. Physiol. Chem.*, 225, 1934, p. 103.

(2) St. J. Prylecki und R. Majmin, *Bioch. Z.*, 273, 1934, p. 262; E. Mystkowski, *ib.*, **278**, 1935, p. 240.

A la fin, le culot insoluble, hydrolysé par une solution de KOH à 33 pour 100 à 100°, renferme une quantité de glycogène de 1g (correspondant à 15 pour 100 du glycogène total).

Les extraits réunis ont été précipités par fractions avec des quantités croissantes de sulfate d'ammonium. Le tableau suivant indique la composition des différentes fractions obtenues :

Saturation en $(NH^4)^2SO^4$ à 0°.	Grammes de subst. sèche obtenue.	Glycogène (3) pour 100 de cette substance sèche.	N pour 100.	P organique pour 100 (4).	P anorganique pour 100 (4).
1/3.....	16	0,5	8,2	0,35	0,25
1/2.....	18	13	8	0,22	0,01
3/5.....	13	20	6,5	0,12	0,008
5/7.....	7	18	7,4	0,15	0,002
1.......	traces				

Afin de voir si le glycogène passé en solution sous forme de symplex était précipité totalement par $(NH^4)^2SO^4$ nous avons dialysé l'ensemble des filtrats, puis, après concentration dans le vide, ajouté 4 volumes d'alcool absolu.

On a obtenu un précipité qui, séparé par centrifugation, a donné 15g de matière sèche renfermant : glycogène, 1 pour 100; N, 2 pour 100; P organique, 0,12 pour 100; P anorganique, 0,03 pour 100.

D'autre part, le filtrat alcoolique concentré à sec a donné 1g de substance qui contenait 3 pour 100 de glycogène.

La répartition du glycogène dans les différentes fractions se fait ainsi : culot initial (desmoglycogène), 15 pour 100; passé en solution (lyoglycogène, 85 pour 100.

La presque totalité du lyo-glycogène-symplex a été séparée par précipitation au $(NH_4)^2SO^4$ et est surtout comprise dans les fractions à 1/2, 3/5 et 5/7 de saturation. On remarquera que les fractions 3/5 et 5/7 ont une composition voisine.

D'autre part la partie précipitée à 1/3 renferme, à côté de substances pour l'instant non définies, des protéines pratiquement sans glycogène; le fractionnement est donc efficace et tend à donner un produit ayant une composition relativement fixe.

---

(3) Dosage suivant la méthode de E. F. W. Pflüger, modifiée par R. W. Willstätter et M. Rohdewald, *loc. cit.*

(4) Dosage suivant la méthode de Fiske et Subbarow (*Journ. of. Biochem*, 66, 1925, p. 375) légèrement modifiée par nous.

BIOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *Sur la régénération des membres chez le Phasme* Carausius morosus *Br.* Note de M. **Maurice Lecamp**, présentée par M. Maurice Caullery.

Les résultats de deux séries d'expériences précédentes ([1]) ont montré l'importance du moignon coxal (partie proximale de l'appendice conservée après autotomie) dans la régénération des membres : la forme du régénérat est uniquement conditionnée par le moignon, en dehors de toute influence de sa base d'implantation. Toutefois, ce résultat ayant été acquis quand les deux éléments, moignon et base, sont en présence, j'ai recherché quel rôle pouvait jouer cette base seule dans le processus de la régénération.

Chez 92 individus, un membre entier a été détaché, après avoir été sectionné à son point d'insertion sur le flanc du phasme et juste au ras du corps, de façon que rien ne restât du moignon. Les animaux ont été opérés très jeunes, entre leur première et leur deuxième mue, et conservés jusqu'à l'état adulte. Dans les 92 cas, non seulement aucun membre typique n'a régénéré, mais aucune formation quelconque ne s'est développée. La base d'implantation du moignon seule est donc incapable de toute régénération de membre.

En comparant ce résultat et celui énoncé en premier lieu, on paraît fondé à considérer le moignon coxal comme le facteur essentiel de la régénération : il apporte les éléments nécessaires à sa réalisation et il en détermine les caractères morphologiques.

Pour confirmer cette conclusion, j'ai essayé de provoquer des régénérations d'appendices à partir de moignons, non plus en contact avec leur base normale d'implantation, mais en dehors d'elle. Un moignon coxal de régénération, produit par autotomie d'un membre quelconque, est prélevé aussitôt, pour être greffé sur le flanc ou la tête de l'individu donneur ou d'un autre de même espèce et de même âge. Les animaux utilisés ont toujours été pris au début de leur vie larvaire et conservés jusqu'à l'époque où il ne régénèrent plus.

Au total, 31 moignons ont été greffés de cette façon ; les résultats se répartissent de la façon suivante :

2 individus sont morts après l'opération; 13 ont perdu leur greffon à la première mue suivant l'intervention; 11 moignons, bien greffés, se sont réduits progressivement,

---

([1]) *Comptes rendus*, **202**, 1936, p. 694, et **204**, 1937, p. 910.

à chaque mue, pour ne laisser subsister qu'une cicatrice ou une légère saillie; 4 moignons se sont conservés dans l'état où ils étaient au moment de leur transplantation; 1 greffon a formé deux petits segments de membre incomplètement différenciés.

A première vue, on pourrait conclure de ces résultats, contrairement à ce qui a été énoncé touchant l'expérimentation précédente, que le moignon coxal ne peut pas régénérer un appendice normal en dehors de sa base habituelle d'implantation. Il faut toutefois considérer que l'insuffisance des résultats peut être imputée aux conditions de la greffe elle-même, et cela découle, du reste, des faits suivants : 1° possibilité d'une régénération, démontrée par le dernier cas analysé; 2° absence de conditions trophiques suffisantes pour le développement des greffons : la conservation, pour certains, de leur taille initiale, indique qu'ils ne participent pas à la croissance de l'organisme qui les porte; la régression, pour les autres, montre qu'ils subissent des transformations désorganisatrices [2]; 3° confirmation de la remarque précédente, en vérifiant l'influence de la greffe elle-même sur une morphologie, non plus en puissance comme dans le cas des moignons de régénération, mais nettement établie :

J'ai greffé, dans des conditions identiques à l'expérience précédente, des moignons dans lesquels les régénérats étaient déjà formés, et des petits membres complètement développés et fonctionnels. Sur 19 opérés, 4 cas n'ont rien donné, les 15 autres ont présenté la même régression progressive caractéristique déjà observée pour les moignons de régénération; les appendices greffés ont complètement perdu leur forme et se sont réduits à des bourgeons peu importants, ne conservant en rien leur forme initiale.

Dans cette dernière expérience, il apparaît, sans conteste, que les morphologies déficientes obtenues ne proviennent pas d'une insuffisance de différenciation du greffon, comme on pourrait l'invoquer dans le cas d'un moignon coxal de régénération, mais qu'il faut en rechercher la cause dans les mauvaises conditions trophiques de la transplantation.

En résumé, on peut conclure que c'est pour les mêmes raisons que les moignons de régénération implantés, n'ayant pu développer de membres typiques, n'ont pas montré leur valeur réelle morphogénétique, mais qu'ils sont bien néanmoins le facteur *essentiel* de la régénération des appendices.

---

(2) Cette observation est confirmée par l'examen histologique des greffons qui se sont le mieux conservés après transplantation : aucune organisation n'a persisté à leur intérieur, les muscles, trachée, nerf, présents au moment de la greffe, ont disparu; seul l'hypoderme s'est raccordé avec celui environnant le greffon; celui-ci, ne peut être considéré que comme un accident de la surface du corps de l'individu.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur les vitamines A_1 et A_2*. Note de MM. **Edgar Lederer** et **Franz H. Rathmann**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

I. La vitamine A des huiles de foie de poissons de mer donne avec le trichlorure d'antimoine (réactif de Carr et Price) une solutiou bleue avec deux bandes d'absorption (à 620 et 580 mμ). Heilbron, Gillam et Morton (¹) ont souvent observé d'autres bandes (à 693, 680, 656, 645, 635 mμ) dans des solutions d'huiles de foie de poissons en présence de trichlorure d'antimoine. La bande à 693 mμ était celle observée le plus fréquemment, mais son intensité ne dépassait jamais 20 pour 100 de l'intensité de la bande de la vitamine A à 620 mμ. Récemment, Lederer et Rosanova (²) ont trouvé des huiles de foie de poissons d'eau douce de Russie, pour lesquelles la bande 693 était plus intense que celle de la vitamine A à 620 mμ. Lederer, Rosanova, Gillam et Heilbron (³) ont comparé ces échantillons quantitativement; avec quelques-uns d'entre eux l'intensité de la bande 693 était deux fois plus grande que celle de la bande 620. Edisbury, Morton et Simpkins (⁴) ont fait des observations analogues et ont proposé d'appeler *vitamine* A_2 le corps possédant la bande à 693 mμ en présence de $SbCl^3$. Cette proposition se base sur les essais de Wald (⁵), qui a trouvé que cette substance joue dans la rétine de poissons d'eau douce le même rôle que la vitamine A dans la rétine des poissons de mer. Plus tard, Edisbury, Morton, Simpkins et Lovern (⁶) ont préféré appeler ce corps *facteur* A_2. Gillam, Heilbron, Jones et Lederer (⁷) en ont étudié la structure chimique. D'après leurs essais, il posséderait, d'autre part, une activité biologique analogue à celle de la vitamine A.

Nous avons trouvé que le facteur A_2 donne, en présence de $SbCl^3$, en dehors de la bande située à 693 mμ, *une deuxième bande* située à 645-650 mμ. Cette bande est normalement masquée et ne peut être décelée qu'avec le spectrophotomètre. Elle devient visible au spectroscope quand on ajoute à

(¹) *Biochem. Journ.*, **25**, 1931, p. 1352.
(²) *Biochimie*, **2**, 1937, p. 293.
(³) *Nature*, **140**, 1937, p. 233.
(⁴) *Nature*, **140**, 1937, p. 234.
(⁵) *Nature*, **138**, 1937, p. 1017.
(⁶) *Biochem. Journ.*, **32**, 1938, p. 118.
(⁷) *Biochem. Journ.*, **32**, 1938, p. 405.

la solution de l'insaponifiable, la fraction des acides gras isolée à partir de la même huile. Cette fraction contient un *inhibiteur* qui diminue fortement l'intensité de l'absorption à 693 mμ, sans changer l'intensité de la bande à 645-650 mμ, qui est à peu près deux tiers de l'intensité de celle à 693 mμ.

L'intérêt que présente cette deuxième bande est le suivant : Jusqu'ici on admettait que la proportion de vitamine A et de facteur A_2 d'une huile était exprimée par les intensités relatives des absorptions à 693 et à 620 mμ. Un quotient E 693/E 620 = 2 signifierait qu'il y a deux fois plus de facteur A_2 que de vitamine A. Ceci n'est évidemment exact que si l'absorption à 620 mμ est uniquement due à la vitamine A. Or *la deuxième bande* (645-650 mμ) *du* facteur A_2 *empiète sur la bande* 620 *de la vitamine* A. Ainsi une partie seulement de l'absorption à 620 mμ est due à la présence de la vitamine A. D'après nos mesures et calculs, un à deux tiers de l'absorption à 620 mμ sont dus à la bande 650 du facteur A_2. Un quotient E 693/E 620 = 2 signifie donc qu'il y a 3 à 6 fois plus de facteur A_2 que de vitamine A. Pour le facteur A_2 pur, ce quotient serait ainsi compris entre 3 et 4.

L'activité biologique d'une préparation de quotient E 693/E 620 = 2 a été déterminée par Gillam, Heilbron, Jones et Lederer [7]. Comme à cette époque il fallait supposer qu'elle contenait à peu près 33 pour 100 de vitamine A, le résultat de l'essai laissait encore subsister un léger doute sur l'activité du facteur A_2. Mais, à la lumière de nos observations sur l'existence de la bande à 650 mμ, il faut conclure que cette proportion est moindre (10 à 20 pour 100) et alors ce doute disparaît et nous pouvons affirmer que le facteur A_2 est bien une vitamine. *Il convient dorénavant de lui appliquer le nom de vitamine* A_2, le nom de *vitamine* A_1 étant employé pour désigner le corps connu jusqu'ici comme vitamine A tout court.

II. Nous avons déterminé la teneur en vitamine A_1 et A_2 de plusieurs poissons d'eau douce de différentes parties de l'Europe (France, Autriche, Hongrie, Hollande). Pour une même espèce la provenance n'influe pas sur la valeur du quotient E 693/E 620, qui varie de 1,9 à 2,6 pour le Sandre (*Lucioperca lucioperca* L.), le Brochet (*Esox lucius* L.) et le Silure (*Silurus glanis* L.). Pour la Carpe (*Cyprinus carpio* L.) au contraire, cette valeur varie de 0,4 à 0,7. La Truite (*Salmo irideus*), l'Esturgeon (*Acipenser sturio* L.) et le Saumon (*Salmo salar* L.) donnent des valeurs intermédiaires (0,5 à 0,9) [voir aussi [6] [7]]. Le quotient correspondant des poissons de mer : Merlan (*Gadus merlangus* L.), Raie (*Raja clavata* L.) et *Ishinagi sterelepis* est inférieur à 0,3. Ceci s'applique également aux huiles de

quelques autres animaux de mer : Calmar (*Loligo vulgaris* Lam.), Coquille Saint-Jacques (*Pecten jacobaeus* L.), Vioulé (*Microcosmus sulcatus*) et d'autres animaux comme la Poule (*Gallus domesticus* L.), la Grenouille (*Rana esculenta* L.) et l'Écrevissse (*Astacus fluviatilis* Fabr.).

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Microdosage colorimétrique du fer. Application à l'analyse des substances biologiques.* Note de M. **Robert Paulais**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Le cupferron (sel d'ammonium de la nitrosophénylhydroxylamine) précipite quantitativement les sels ferriques. La combinaison formée, de teinte jaune ou rouge, suivant la concentration, est insoluble dans les acides dilués. Pratiquement, on opère la précipation en milieu acide normal, et en présence d'un oxydant pour amener le fer à l'état ferrique. Le précipité est intégralement soluble dans le chloroforme et le colore en jaune; les métaux non combinés au cupferron restent dans la phase aqueuse, où l'on peut les déceler directement [1].

La solution chloroformique du complexe ferrique peut être examinée à l'électrophotomètre; elle possède pour la lumière bleue un pouvoir d'absorption considérable. Avec l'électrophotomètre de P. Meunier [2] on pourra doser en lumière bleue (λ efficace $= 0^{\mu},42$) de 2 à 50^{γ} de fer dans 10^{cm^3} de chloroforme, avec une approximation de $0^{\gamma},4$. L'identité du produit sera contrôlée en faisant une deuxième mesure dans le vert ($\lambda = 0^{\mu},48$); les absorptions mesurées dans ces deux couleurs devront correspondre à la même quantité de fer. L'appareil aura été, au préalable, étalonné avec une solution exactement titrée de sel de fer; pour ces grandes dilutions, la coloration de la solution chloroformique du complexe est proportionnelle à la concentration en fer.

Le cupferron se décomposant assez rapidement, et donnant, même en l'absence de métaux, des produits verts, solubles dans le chloroforme, il importe de préciser le mode opératoire. Si l'on effectue la précipitation en milieu acidifié par l'acide sulfurique, et rendu faiblement oxydant par quelques gouttes d'eau oxygénée, le cupferron reste incolore pendant

---

(1) P. Meunier, *Bull. Soc. Chim. biol.*, **17**, 1935, p. 548.
(2) *Bull. Soc. Chim. biol.*, **19**, 1936, p. 113.

plusieurs heures. Il est alors facile d'effectuer un dosage colorimétrique correct, ce dernier ne demandant que quelques minutes.

D'autres métaux peuvent être précipités par le cupferron, et cette précipitation est fonction du pH ([3]). En pH inférieur à 1,8, outre le fer, on pourra précipiter, parmi les éléments signalés dans la matière vivante : le molybdène, le titane, l'étain, le cuivre et le vanadium. Les trois premiers éléments, peu abondants dans les produits biologiques, et donnant avec le cupferron des combinaisons incolores ou peu colorées, ne gêneront pas le dosage du fer. La combinaison verte donnée par le cuivre est d'une intensité de coloration 50 fois moindre que celle du fer; dans la majorité des cas, l'erreur due au cuivre pourra donc être négligée. Il en sera de même du vanadium, élément peu abondant, donnant un dérivé rouge d'intensité un peu moindre que le dérivé ferrique. Il est d'ailleurs possible d'isoler le fer par précipitation préalable par l'ammoniaque, en présence de phosphates alcalins, mais cette précaution sera, la plupart du temps, inutile.

L'intérêt principal de la technique proposée, est la possibilité d'opérer en présence de grandes quantités de phosphates. Dans les exemples donnés ci-dessous, le fer a été précipité par le cupferron, en présence de 1^g de phosphate disodique :

Fer ajouté	50^γ	40^γ	20^γ	10^γ
Fer retrouvé	$50^\gamma,2$	$39^\gamma,6$	$19^\gamma,8$	$9^\gamma,6$

Technique d'isolement du complexe. — A la solution acide contenant le fer et les phosphates, ajouter quelques gouttes d'eau oxygénée, et $0^{cm^3},5$ d'une solution aqueuse récente de cupferron à 5 pour 100. Agiter fortement, puis entraîner le précipité par trois épuisements au chloroforme (lors du troisième épuisement, ajouter quelques gouttes de solution de cupferron, pour s'assurer que tout le fer a été précipité et entraîné). La liqueur chloroformique est amenée à 10^{cm^3}, et la coloration mesurée à l'électrophotomètre.

Application à l'analyse des produits biologiques. — La technique décrite est applicable directement au résidu de destruction de la matière organique, dissous dans l'acide sulfurique dilué. Dans le cas de destruction par voie humide (sulfonitrique, ou sulfonitroperchlorique), il est nécessaire, pour éviter la décomposition rapide du cupferron par les réactifs oxydants qui peuvent être présents dans le résidu sulfurique, de neutraliser celui-ci par l'ammoniaque; on se replacera ensuite en milieu acide convenable par l'acide sulfurique 2N.

([3]) Pinkus et Martin, *Journ. de Chim. Phys.*, 24, 1927, p. 83 et 137.

Cette technique pourra être facilement adaptée au microdosage du fer dans le sang, à partir d'une prise d'essai de $0^{cm^3},05$ de sang, mesurée à l'aide d'une micropipette calibrée.

SÉROLOGIE. — *Globulines et réagines des sérums syphilitiques.* Note de MM. **Henri Bierry, Marcel Andrac** et **Bernard Gouzon**, présentée par M. Paul Portier.

Un très grand nombre d'expériences ont été entreprises pour déterminer la fraction protéique des sérums syphilitiques qui porte les substances spécifiques (réagines) entrant en jeu dans la réaction de Bordet-Wassermann. Les opinions sont encore partagées : le pouvoir complémentaire serait lié pour les uns à la fraction albumine, pour d'autres à la fraction globuline, pour certains enfin à une partie seulement de cette dernière fraction. Les divergences des résultats tiennent à la diversité des méthodes employées (mécanique, physique, chimique) pour le fractionnement et à la pureté relative, par suite d'un manque de test d'identification certaine, des protéines ainsi isolées.

Récemment V. Deutsch et Lominsky, utilisant l'ultracentrifugation, ont mis en lumière l'interdépendance des réagines et des globulines sériques. D'autre part, nous avons eu l'occasion de constater que les globulines du sérum sanguin, obtenues par action de CO^2, pouvaient être scindées en deux fractions : globuline (proprement dite) et mucoglobuline. Il nous a paru intéressant de rechercher le comportement de ces deux protéines dans la réaction de Bordet-Wassermann.

Technique. — Nous ne pouvons donner qu'un résumé succinct. La partie des globulines du sérum sanguin, précipité par CO^2, est traitée comme il a déjà été indiqué [1]. La globuline est dissoute dans une solution de NaCl à 1 pour 100 (liquide A); le sédiment de mucoglobuline est agité avec un même volume de solution de NaCl à 1 pour 100 (liquide B). Les deux liquides A et B sont ensuite rendus isotoniques par addition d'eau distillée et amenés à un même volume V. Le volume V est celui du sérum primitif dont on a séparé les globulines et mucoglobulines. Au moment de l'emploi,

---

(1) *C. R. Soc. Biol.*, **127**, 1938, p. 483.

les liquides A et B sont centrifugés de façon à éliminer toute protéine insoluble. Une certaine quantité de solution A et B est prélevée pour un microdosage d'azote total.

Les réactions sérologiques étaient effectuées comparativement avec les solutions A et B et le sérum total. Nous avons utilisé de l'alexine fraîche (cobaye mâle) et du sérum hémolytique antimouton de lapin provenant de l'Institut Pasteur et de notre laboratoire. Nous avons fait usage d'un antigène de l'Institut Pasteur ($0^{cm^3},2$ d'une solution au $1/10^e$ de cet antigène n'était pas anticomplémentaire). La méthode de Calmette et Massol a été employée : la réaction avait lieu avec un volume de $2^{cm^3},5$ en présence de 10 doses minima lytiques de sérum antimouton. Les globules de mouton lavés étaient utilisés, dilués au $1/20^e$ à la dose de $0^{cm^3},5$. Le temps de fixation était d'une heure. Lecture faite après un séjour de 30 minutes à 37°.

Résultats sérologiques. — Nous avons expérimenté sur 14 échantillons de sérums (individuels) provenant de syphilitiques non traités. Tous ces sérums reconnus positifs (Hecht, Levaditi et Latapie, Bordet-Wassermann) ont été titrés par la méthode de Calmette et Massol. Ils fixaient entre 5 et 35 unités d'alexine par centimètre cube de sérum.

En général, le pouvoir fixateur du sérum total est inférieur à celui de la solution A (globulines) qui est lui-même inférieur à celui de la solution B (mucoglobuline). La présence d'une fraction parfois extrêmement faible de mucoglobuline (renfermant moins de $0^{mg},06$ d'azote) est suffisante pour provoquer une réaction positive.

En étudiant le pouvoir anticomplémentaire des sérums frais et des solutions A et B, nous avons constaté deux fois que les solutions A et B, obtenues à partir d'un sérum non anticomplémentaire, étaient devenues antialexiques.

Conclusions. — Les globulines et surtout les mucoglobulines, extraites par le procédé indiqué des sérums syphilitiques, se montrent plus opérantes dans les réactions sérologiques que le sérum originel. Il semble logique d'admettre que les réagines sont ainsi libérées de quelque substance empêchante.

Ces expériences permettent de penser que les réagines s'apparentent à certaines globulines et mucoglobulines présentes dans les sérums syphilitiques, ou bien qu'elles ont une individualité chimique propre, mais assez voisine, et par suite, accompagnent ces protéines dans le fractionnement sérique.

IMMUNOLOGIE. — *La propriété anticorps de l'hémolysine est exercée par une substance isolable du sérum hémolytique.* Note de M. **Maurice Doladilhe**, présentée par M. Louis Martin.

De nombreux auteurs ont signalé que l'hémolysine se trouve dans la globuline définie par Hofmeister.

Charpentier, Doladilhe et Morel ([1]) viennent de confirmer ces observations, en montrant que cet anticorps est localisé dans la protéine visqueuse, qui est un des constituants de la globuline.

De nouvelles recherches nous ont permis d'établir que cette propriété anticorps est l'apanage d'une substance que nous avons réussi à isoler de la protéine visqueuse.

Cette substance est stable et soluble en milieu déminéralisé, alors que la protéine visqueuse y est partiellement insoluble et totalement instable.

Ces différences de propriétés physiques permettent l'isolement de cette substance. Toutes nos expériences ont été effectuées avec du sérum de cheval hémolytique antimouton.

La protéine visqueuse, en solution isotonique de chlorure de sodium, est déminéralisée par une dialyse en champ électrique continu (durée 48 heures, intensité du courant 3,5 milliampères), effectuée entre des électrodes de plomb, qui fixent irréversiblement les ions chlore ([2]). (Méthode Mazille.)

La fraction insoluble précipite en cours de dialyse et la fraction instable est précipitée à la fin de l'opération par l'addition d'une solution d'acide chlorhydrique centinormale en quantité juste suffisante pour obtenir une floculation instantanée (pH voisin de 6,1).

Le chauffage complète l'action des ions hydrogène. Le séjour pendant une heure à 50° suffit, en effet, pour provoquer une nouvelle précipitation.

Les précipités engendrés par la dialyse électrique, par les ions hydrogène et par le chauffage, représentent environ les 92 pour 100 de la protéine visqueuse et ne contiennent qu'une faible partie de l'hémolysine; le reste de cet anticorps est localisé dans la fraction liquide restée stable.

([1]) *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 451.

([2]) *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 379.

Desséché dans le vide sec, ce liquide laisse un résidu solide, constitué par des paillettes transparentes et incolores; on les reprend par de l'eau distillée, dans laquelle elles sont partiellement solubles.

On sépare l'insoluble par centrifugation et l'on soumet de nouveau la solution au vide sec. Après deux ou trois manipulations semblables, on obtient un extrait sec *entièrement soluble dans l'eau distillée.*

Les solutions ainsi obtenues contiennent la majeure partie de l'hémolysine qui se trouvait dans la protéine visqueuse.

Les chiffres du tableau donnent un exemple de leur pouvoir anticorps. Ils indiquent les temps au bout desquels $0^{cm^3},1$ d'une alexine de cobaye, porté dans l'eau physiologique à des dilutions croissantes, provoque l'hémolyse totale de $1^{cm^3},5$ d'une suspension de globules rouges de mouton, additionnée de $0^{cm^3},05$ d'une solution :

a, de protéine visqueuse; *b*, de notre substance, obtenue en diluant dans un volume V d'eau physiologique l'extrait sec fourni par le même volume V de protéine visqueuse.

	10.	20.	50.	70.
Protéine visqueuse..........	15 min.	25 min.	35 min.	60 min.
Extrait sec..................	26 min.	40 min.	49 min.	70 min.

Injectées au cobaye, nos solutions communiquent à son sérum sanguin, par immunité passive, la propriété d'hémolyser directement les globules rouges du mouton.

Soumise à l'épreuve anaphylactique, cette substance ne présente plus les caractères de la protéine visqueuse. Injectée en solutions très concentrées, par la voie intracardiaque, à des cobayes ayant reçu, 20 ou 30 jours auparavant, une injection sensibilisante de sérum complet ou de protéine visqueuse de cheval, elle se révèle, en effet, incapable de déclencher le choc anaphylactique, que provoquent par contre les solutions même très diluées de protéine visqueuse.

A 15^h35^m l'Académie se forme en Comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Section d'Anatomie et Zoologie présente, par l'organe de son Doyen, la liste suivante de candidats à la place vacante par le décès de M. *Ch. Gravier :*

En première ligne.............	M. **Émile Roubaud**.
En seconde ligne, ex æquo *par ordre alphabétique*.........	MM. **Raoul Anthony**, **Édouard Chatton**, **Louis Fage**, **Étienne Rabaud**, **Paul Wintrebert**.

L'Académie ajoute à la liste le nom de M. **Christian Champy**.

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 17^h30^m.

A. Lx.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus pendant les séances de février 1938.

Les méthodes actuelles de la chimie, par Pierre Jolibois. Paris, Armand Colin, 1938; 1 vol. 17cm (présenté par M. P. Lebeau).

Exploration zoologique des côtes de l'Algérie orientale (Secteurs de Bône et de La Calle), par L. G. Seura. Extrait du *Troisième Congrès de la Fédération des Sociétés savantes de l'Afrique du Nord*. Alger, Société historique algérienne, 1937; 1 fasc. 24cm.

Les Lactario-Russulés du domaine oriental de Madagascar. Essai sur la classification et la phylogénie des Astérosporales, par Roger Heim. Paris, M. L. Méry, 1937; 1 vol. 27cm.

Compte rendu définitif de la VIIe Assemblée de l'Institut international de Recherches betteravières réunies à Bruxelles les 11, 12 *et* 13 *janvier* 1937; 1 vol. polycopié, 33cm (présenté par M. H. Colin).

L'organisation du calcul mécanique dans les bureaux, par Georges Maes. Bruxelles, Éditorial-Office, s. d.; 1 vol. 22cm.

La République de l'Équateur, par Georges Perrier, in *Cahiers de politique étrangère*. Paris, Les Éditions France-Amérique, 1937; 1 vol. 21cm.

Journée de la lutte chimique contre les ennemis des cultures, 19-25 *mai*. Paris, Chimie et Industrie, 1937; 1 vol. 27cm (présenté par M. G. Bertrand).

Cours de navigation et de compas de l'École navale, par Frédéric Marguet. Paris, Société d'éditions géographiques, maritimes et coloniales, 1938; 1 vol. 25cm,5.

Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris. Première thèse. *Sur l'analyse mécanique. Application aux machines à calculer et aux calculs de la mécanique céleste*. Deuxième thèse. *Le coloriage des cartes*, par Louis Couffignal. Paris, Gauthier-Villars, 1938; 1 vol. 24cm,5 (présenté par M. d'Ocagne).

Recherches théoriques et expérimentales sur la Métallurgie thermique du zinc, 1931-1938, par Octave Dony-Hénault et Claude Decroly. Liége, Georges Thone, 1938; 1 vol. 24cm (présenté par M. L. Guillet).

Physique, par Georges Simon et André Dognon, in *Collection du P. C. B.* Paris, Masson et Cie, 1937; 1 vol. 20cm (présenté par M. A. Cotton).

Revue de cytologie et de cytophysiologie végétales, publiée par Alexandre Guilliermond avec le concours de A. Eichhorn, G. Mangenot et L. Plantefol. Tome II, fasc. I à IV. Paris, Librairie Le François, 1936; 4 fasc. 25cm.

Über die Eisverhältnisse des Baltischen Meeres an den küsten Finnlands nebst einem Atlas, von Risto Jurva. Helsinki, 1937, Helsingfors; 1 vol. 24cm et 1 *Atlas*, 41cm (en langue allemande).

Tercentenary Papers of the Harvard Observatory. Vol. 105. Cambridge, Massachusetts, published by the Observatory, 1937; 1 vol. 30cm (en langue anglaise).

Annales du Bureau des Longitudes. Tome XIe. Paris, Gauthier-Villars, 1938; 1 vol. 28cm, 5.

Royal Institution of Great Britain Weekly Evening Meeting, Friday, November 19, 1937. *Clay*, by Sir William Bragg; 1 fasc. 21cm,5 (en langue anglaise).

J. B. Boussingault à la Société centrale d'agriculture, à la Commission d'enquête sur les engrais industriels, au Comité d'hygiène et de salubrité publique de la Seine, par M. Lenglen. Beauvais, Imprimerie centrale administrative, 1937; 1 vol. 25cm (présenté par M. Schribaux).

Flore de Madagascar (Plantes vasculaires) XXIIIe famille. *Aponogétonacées*, par H. Jumelle. Tananarive, Imprimerie officielle, 1936; 1 fasc. 24cm.

Flore de Madagascar (Plantes vasculaires) XXIXe famille. *Cypéracées*, par H. Chermezon. Tananarive, Imprimerie officielle, 1937; 1 vol. 24cm.

Flore de Madagascar (Plantes vasculaires) XXXIIe famille. *Lemnacées*, par H. Jumelle. Tananarive, Imprimerie officielle, 1937; 1 fasc. 24cm.

Le Krypton, par E. Mathias, C. A. Crommelin et J. J. Meihuizen. Extrait des *Annales de physique*; IIe série, tome 8. Paris, Masson et Cie, 1937; 1 fasc. 22cm,5.

Le régime mensuel de la pluie, en fonction de l'altitude, dans le Puy-de-Dôme et les départements voisins du Plateau central (Loire, Allier, Haute-Loire), par E. Mathias. Extrait de *La Météorologie*, no 5, IIIe série. Paris, Société météorologique de France, 1937; 1 fasc. 27cm,5.

ERRATA.

—

(Séance du 28 février 1938.)

Note de M. *Henri Wahl*, Synthèse du méthoxy-9-céto-5-tétrahydro-5.6.7.8-phénanthrène :

Note (²) au bas de la page, *au lieu de Ber. d. Chem. Ges.*, 7, 1938, p. 47, *lire Ber. d. Chem. Ges.*, 71, 1938, p. 471.